



**CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA EN
EL DISEÑO DE TRIÁNGULOS**

NATALIA MÚNERA ESCOBAR

**UNIVERSIDAD DE CALDAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS
MANIZALES, COLOMBIA**

2014

**CARACTERIZACIÓN DEL PROCESO DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA EN
EL DISEÑO DE TRIÁNGULOS**

NATALIA MÚNERA ESCOBAR

**TRABAJO DE INVESTIGACIÓN PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR AL TÍTULO DE:**

MAGISTER EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

ASESOR:

MAGÍSTER WILSON ALONSO PIEDRAHITA RESTREPO

UNIVERSIDAD DE CALDAS

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

MANIZALES, COLOMBIA

2014

A mi madre y hermanos, ejemplo de Unión,
Alegría, Esfuerzo y Amor.
Ustedes me han enseñado que habrá dificultades.
Y siempre estaremos juntos para superarlas.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por apoyarme en la idea de esta investigación y creer siempre en mí.

A mi asesor y amigo Wilson Alonso Piedrahíta Restrepo por el acompañamiento personal y profesional que me ofreció antes y durante la investigación.

A la Rectora, docente Beatriz Pino y estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Pedro Luis Villa, por su disposición y apoyo.

Resumen

El presente documento muestra la caracterización del proceso de Construcción Geométrica a partir de tres niveles para la construcción: la motricidad (este nivel se caracteriza por la coordinación visomanual, la lateralidad y el manejo del espacio), la interpretación de la instrucción en el diseño (este nivel se caracteriza por el reconocimiento de las imágenes concretas descritas en una instrucción, las relaciones entre las mismas y la realización del diseño) y la verificación desde el proceso discursivo de configuración (este nivel se caracteriza por la decodificación y codificación de instrucciones, y por el reconocimiento de diferentes maneras para realizar el mismo diseño). Se toma el proceso cognitivo de Construcción Geométrica como uno de los pilares, junto con los procesos cognitivos de Visualización y Razonamiento, que posibilitan el desarrollo del pensamiento geométrico. Una de las implicaciones pedagógicas expuestas en el trabajo, menciona la importancia de posibilitar a los estudiantes trabajar con las representaciones externas que ellos mismos diseñan, porque es en ellas que se relacionan estos tres procesos cognitivos antes mencionados.

La caracterización del proceso de Construcción Geométrica es el resultado del trabajo investigativo que fue desarrollado en la Institución Educativa Pedro Luis Villa de la Ciudad de Medellín, con estudiantes de quinto grado de educación básica.

Palabras-clave:

Proceso de construcción geométrica, triángulos, diseño, habilidades para el diseño, imágenes mentales

Abstract

This document shows the characterization of the Geometric Construction from three levels for construction: the motor (this level is characterized by the eye-hand coordination, laterality and space management), the interpretation of the instruction in the design (this level is characterized by the recognition of specific images described in a statement, the relations between them and the design realization) and verification from the discursive configuration process (This level is characterized by decoding and coding instructions, and recognition of different ways to perform the same design). Cognitive process Geometric Construction is taken as one of the pillars, along with the cognitive process Visualization and Reasoning, that enable the development of geometric thought. One of the pedagogical implications exposed at work, mentions the importance of enabling students to work with external representations that themselves design, because it is in them that relates these three cognitive processes previously mentioned.

Characterization of Geometric construction process is the result of research work that was developed in the Educational Institution Pedro Luis Villa of the City of Medellin, with fifth grade students of elementary school.

Keywords:

Geometric construction process, triangles, design, design skills, mental images

Tabla de contenidos

1. Introducción	1
2. Área problematizadora.....	4
3. Objetivos.....	6
3.1. Objetivo general	6
3.2. Objetivos específicos	6
4. Marco teórico	8
4.1 Educación matemática, pedagogía y didáctica	8
4.2 Procesos cognitivos en el desarrollo del pensamiento geométrico	16
4.2.1 Construcción geométrica	17
4.2.2 Visualización	21
4.2.3 Razonamiento	25
4.3 El modelo Van Hiele de desarrollo de pensamiento geométrico	26
4.3.1. Niveles de entendimiento	27
4.3.2. Fases orientadoras para el aprendizaje.....	29
4.4 Motricidad.....	30
4.5 Comunicación	33
4.6 Los triángulos.....	37
4.6.1. Enseñanza de los triángulos	38
4.6.2 Aprendizaje de los triángulos	39
5. Estado del arte.....	40
6. Diseño metodológico	47
6.1. Tipo de investigación.....	47
6.2. Etapas de la investigación.....	49
6.3. Población y muestra.....	52

7. Caracterización del proceso de construcción geométrica.....	55
7.1. Análisis de datos	57
7.2. Categorías.....	62
7.3. Caracterización	73
7.3.1. Proceso de Construcción Geométrica	79
8. Conclusiones	80
9. Implicaciones pedagógicas.....	82
10. Recomendaciones.....	84
11. Referencias bibliográficas	85
12. Anexos	89

Tabla de ilustraciones

Ilustración 1: Ruta de investigación.....	7
Ilustración 2: Ruta para el marco teórico.....	40
Ilustración 3: Ruta metodológica	54
Ilustración 4: Tabla descriptiva de los estudiantes	71
Ilustración 5: Tabla que relaciona los niveles para la construcción con las habilidades para el diseño y las imágenes mentales	75
Ilustración 6: Tabla sobre el cumplimiento de los descriptores	78
Ilustración 7: Esquema sobre el proceso de Construcción Geométrica	79

1. Introducción

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría han estado, durante muchos años, limitados a encasillarse en lo escrito por Euclides en sus libros “Los Elementos”. Sin descartar la importancia de la geometría euclidiana en el campo teórico de las matemáticas, desde hace varias décadas se vienen desarrollando otro tipo de geometrías que exploran terrenos más abstractos donde, resolviendo problemas geométricos, las herramientas y la validez de los procedimientos los aporta el álgebra. Sin embargo, y teniendo en cuenta los avances que se han hecho desde estas geometrías, se siguen retomando las teorías expuestas por Euclides en los grados de escolaridad básica, las cuales son propuestas por el docente en el aula después de un trabajo reflexivo sobre su pertinencia y manera de llevarlas a los procesos de enseñanza y aprendizaje; éstas posibilitan ir construyendo en los estudiantes un sistema deductivo y formas de visualizar, razonar y representar su alrededor.

Al profundizar en el estudio del desarrollo del pensamiento espacial, se pueden destacar tres procesos que coordinados posibilitan que los estudiantes puedan tener una comprensión de los objetos de estudio que la geometría tiene, los cuales son: visualización, razonamiento y construcción geométrica. Igualmente, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría se puede retomar el Modelo de Van Hiele, como un parámetro para poder identificar avances en los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes. A partir de este modelo se han desarrollado trabajos de investigación que lo involucran y profundizan en el estudio de los procesos de visualización y razonamiento

El MEN (2006), en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en Colombia, hace una propuesta para el desarrollo del pensamiento espacial desde el grado primero de educación básica, comenzando con un reconocimiento de cuerpos geométricos y figuras. El mismo documento, propone ya para el grado

quinto de educación básica no sólo el reconocimiento de cuerpos geométricos y figuras, sino también su identificación y representación por medio de construcciones geométricas, a partir del uso de instrumentos de medida como la regla, el compás y el transportador.

En los procesos de enseñanza y aprendizaje que se viven en la escuela, se puede evidenciar el rezago en el que está la enseñanza para el aprendizaje de la geometría, como asignatura que se retoma solo cuando queda tiempo real en las clases después de abordar las temáticas de aritmética o algebra, mirando superficialmente sus conceptos.

En la última década se han incrementado, dentro del campo de la geometría, el estudio del proceso de Construcción Geométrica desde el uso de software de geometría dinámica, abandonando un poco el uso de los instrumentos de medida físicos. Este abandono se debe al esfuerzo que implica el uso de los instrumentos físicos por parte del docente y del estudiante. Del docente porque le exige invertir mucho tiempo y paciencia, y del estudiante porque le exige poseer una buena habilidad motriz para utilizar los instrumentos de medida adecuadamente; además de un esfuerzo cognitivo para establecer relaciones y conversiones entre lo visual, sus razonamientos y las construcciones.

Este trabajo investigativo consistió en adaptar una unidad didáctica orientada por el Modelo de Van Hiele y desarrollada por estudiantes de quinto grado de educación básica, de la Institución Educativa Pedro Luis Villa, en la cual el proceso de Construcción Geométrica se evidenció con el uso de los instrumentos de medida físicos por parte de los estudiantes. Con el desarrollo de la unidad didáctica se caracterizó el proceso de Construcción Geométrica, a partir de las relaciones que este tiene con los proceso de visualización y razonamiento, en el

diseño¹ de triángulos. Al finalizar este informe, se presenta la mencionada caracterización desde tres niveles para la construcción que requiere el proceso de Construcción Geométrica: motricidad, interpretación de las instrucciones durante el diseño y verificación desde el proceso discursivo de configuración. Estos niveles, aunque se exploraron en el diseño de triángulos, se podrán abordar en futuras investigaciones para el diseño de otras representaciones gráficas.

¹ Este trabajo investigativo se refiere a diseño como la construcción de un triángulo. Se menciona así con el fin de diferenciar la construcción de una figura del proceso de Construcción Geométrica.

2. Área problematizadora

El MEN (1998), en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, presenta para el desarrollo del pensamiento matemático algunos esquemas que articulan los procesos generales, los conocimientos básicos y los contextos. Teniendo como foco el conocimiento básico que proporciona el pensamiento espacial y sistemas geométricos, los procesos de enseñanza y aprendizaje que se experimenten en geometría deben posibilitar que los estudiantes desarrollen procesos generales como la modelación, elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, que les permitan "...“hacer cosas”, moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna". El proceso cognitivo de Construcción Geométrica, como uno de los tres procesos cognitivos que posibilitan el desarrollo del pensamiento espacial, estará vinculado con los procesos generales antes mencionados, en la medida que permite a los estudiantes aplicar su habilidad motriz para diseñar representaciones externas que respondan a situaciones problema. De esta forma la motricidad, reflejada en el uso de los instrumentos de medida, será una característica importante en el proceso cognitivo de Construcción Geométrica.

El MEN (2006) estructura los conocimientos básicos del pensamiento espacial y sistemas geométricos, para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, desde las relaciones más simples y sencillas de las figuras bidimensionales y tridimensionales hasta las más complejas. Este proceso de complejidad desde lo conceptual y el diseño de representaciones externas, se debe proponer a los estudiantes paulatinamente, vinculando primero instrumentos de medida físicos que le permitan diseñar representaciones, para luego enfrentarse con mayor confianza y facilidad a premisas e instrucciones más complejas que se puedan diseñar con la ayuda de software de geometría dinámica.

Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) expresan que los diseños son importantes porque concretizan características específicas expuestas en unas premisas y permiten que los estudiantes encuentren relaciones teóricas no explícitas.

Al observar a los estudiantes cuando se enfrentan a la modelación de algunas situaciones problema, que requieren del manejo de los instrumentos de medida, se hace notoria la dificultad que presentan al momento de utilizarlos, interpretar la instrucción escrita o verbal y realizar la representación externa. Se pueden presentar circunstancias donde los estudiantes comprenden la instrucción pero no saben cómo vincularla con el uso de los instrumentos para realizar la representación externa; o sucede que los estudiantes saben usar los instrumentos pero no entienden la instrucción y realizan el diseño que no corresponde; o sucede que los estudiantes realizan un diseño pero no comprendieron como usar los instrumentos y tampoco lograron entender lo que se expresaba en la instrucción.

Estas circunstancias permiten notar que hay una relación estrecha entre el manejo de los instrumentos de medida, la interpretación de la instrucción y la representación externa como resultado del análisis hecho por el estudiante de los recursos físicos y cognitivos con los que cuenta. Por esta razón se hace necesario profundizar en proceso cognitivo de Construcción Geométrica donde se retoman no sólo las representaciones externas como un producto final, sino también los niveles previos que el estudiante debe recorrer para construir estas representaciones. Por eso la pertinencia de preguntar ¿cuáles pueden ser algunas características fundamentales para el desarrollo del proceso de cognitivo de Construcción Geométrica en el diseño de polígonos, específicamente de los triángulos, en estudiantes de quinto grado de educación básica?

3. Objetivos

3.1. Objetivo general

Caracterizar el proceso de Construcción Geométrica en el diseño de triángulos, a partir del desarrollo de una unidad didáctica que relacione elementos de los procesos cognitivos de Visualización y Razonamiento, en estudiantes de quinto grado de educación básica.

3.2. Objetivos específicos

- Relacionar las imágenes mentales y las habilidades del proceso cognitivo de visualización con el proceso cognitivo de Razonamiento, para describir características propias del proceso cognitivo de Construcción Geométrica.
- Adaptar y aplicar una unidad didáctica, basada en las fases para el aprendizaje del Modelo de Van Hiele, que permita establecer vínculos de los instrumentos de medida con en el proceso cognitivo de Construcción Geométrica.

A continuación se presenta la ruta que guió la investigación:



Ilustración 1: Ruta de investigación

4. Marco teórico

El desarrollo del pensamiento geométrico tiene implicaciones desde lo institucional, cognitivo, metodológico y personal. Dentro de lo institucional deben plasmarse las concepciones que una comunidad tiene de la educación, la educación matemática, la pedagogía y la didáctica, pues éstas son las que reflejarán la perspectiva desde donde se abordan y analizan los procesos de enseñanza y aprendizaje. Dentro del aspecto cognitivo se deben tener en cuenta las representaciones semióticas y mentales que el estudiante construye durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos. Dentro del aspecto metodológico se hace importante revisar algunos caminos que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos, en este caso, geométricos. Y desde el aspecto personal se deben analizar las destrezas necesarias que permitirán a los estudiantes acceder más fácilmente al conocimiento.

A partir de lo anteriormente mencionado y a partir de lo expuesto por Osorno, Ramírez y Múnera (2014), se ampliarán cada uno de estos aspectos con el fin de caracterizar el proceso de construcción geométrica en los estudiantes de quinto grado de educación básica de la IEPLV².

4.1 Educación matemática, pedagogía y didáctica

La educación matemática, entendida desde su significado, está relacionada con el aprendizaje, la práctica y la enseñanza de las matemáticas. Desde un componente cultural y social, está involucrada con actividades humanas en la medida que es una disciplina cambiante, que busca ser llevada a la escuela a partir de la apropiación de docentes y estudiantes por medio de la aplicación de metodologías fundadas en algunas posturas filosóficas.

² IEPLV: Institución Educativa Pedro Luis Villa

El MEN (1998) en su documento expone el resultado de una encuesta donde se expresa que el conocimiento matemático es considerado, por algunos, como el conocimiento cotidiano que tiene que ver con los números y las operaciones, y por otros, como el conocimiento cotidiano elemental que resulta de abordar superficialmente algunos elementos mínimos de la matemática disciplinar.

Con base en esta perspectiva, el conocimiento matemático en la escuela estaba dotado de un carácter instrumental, que por una parte se refleja en el desarrollo de habilidades y destrezas para resolver problemas de la vida práctica, para usar ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos y, por otra, en el desarrollo del pensamiento lógico-formal.

La historia muestra que el conocimiento matemático escolar proviene de diferentes posturas expuestas por filósofos, matemáticos y educadores matemáticos.

Entre ellas se resaltan el platonismo, el intuicionismo, el logicismo, el formalismo y el constructivismo.

El conocimiento matemático representa las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y períodos históricos particulares. El sistema escolar es, entonces, donde tiene lugar gran parte de la formación matemática de las nuevas generaciones y por ello la escuela debe promover las condiciones para que estas favorezcan la construcción de los conceptos matemáticos, mediante la elaboración de significados simbólicos compartidos.

El conocimiento matemático en la escuela es considerado hoy como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad de los estudiantes. Como toda tarea social debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que permanentemente surgen y se entrecruzan con la cotidianidad no formalizada.

Estas reflexiones han dado lugar a que la comunidad de educadores matemáticos haya ido decantando una nueva visión de las matemáticas escolares basada en:

- Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento.
- Valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.
- Considerar que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento.
- Reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar todo ciudadano.
- Comprender y asumir los fenómenos de transposición didáctica.
- Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones.
- Privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas.

Es importante resaltar que el valor del conocimiento histórico al abordar el conocimiento matemático escolar no consiste en recopilar una serie de anécdotas y curiosidades para presentarlas ocasionalmente en el aula. El conocimiento de la historia puede ser enriquecedor, entre otros aspectos, para orientar la comprensión de ideas en una forma significativa.

Según Piedrahíta y Vásquez (s.f.):

El objetivo central de la Educación Matemática y sus acciones, se basan en el compartir con los estudiantes una parte de la estructura teórica ya construida, utilizando para ello diferentes recursos y herramientas. Si se consideran las matemáticas como el objeto de aprendizaje de los estudiantes, el objetivo y las acciones se deben centrar en encontrarle sentido a una parte del gran acumulado de significados validados en el

campo matemático desde la teoría y compartidos por el docente, de tal forma que sean utilizados por ellos en su vida diaria, en los ámbitos profesional y cotidiano no formalizado.

Como lo expresan Piedrahíta y Vásquez (s.f.), cuando se hace referencia a la Educación Matemática, se reconoce que es una disciplina que relaciona la Educación y el campo conceptual de la Matemática. Además, se reconoce que en la Educación Matemática se articulan varias ramas del conocimiento, tales como: la pedagogía, la didáctica, la psicología, la semiótica, la epistemología, la sociología, las ciencias cognitivas, la informática y lógicamente, la matemática.

A partir de lo descrito por Piedrahíta y Vásquez (s.f.), se ampliarán los conceptos de pedagogía y didáctica y su relación con la educación matemática.

Foucault (1975) hace una descripción de la transición entre el Antiguo Régimen y el Régimen Disciplinario donde en cuarteles, hospitales y escuelas se implementan algunas estructuras que permitirán hacer vigilancia sobre cada uno de los sujetos que estén bajo su cargo y castigo para hacer corrección a desviaciones que estos sujetos demuestren.

Entre estas estructuras están:

- La vigilancia jerárquica: la vigilancia es una mirada que no es vista y que ejerce tanta fuerza en los sujetos que los invita a hacer las cosas siempre bien pues no saben en qué momento los están vigilando.
- El castigo disciplinario: caracterizado por reglas que hay que cumplir y se castigan desviaciones; se toma este castigo como correctivo. De esta forma se puede premiar al que siempre hace el “bien” y degradar al que hace el “mal”.
- Examen: esta forma permite describir, analizar y comparar los sujetos. Como se describe de manera detallada se puede controlar y dominar fácilmente.

Hoy en día, esta visión que nos mostró Foucault ha cambiado, pues a la escuela se han incorporado nuevas formas de pensarla que van más allá de querer controlar todo lo que hacen los estudiantes, viéndola como un espacio donde ellos van a potencializar sus habilidades, fortalecer sus competencias y crecer en cada una de las dimensiones del ser humano.

Así mismo esta visión ha cambiado para dejar a un lado la idea de simplemente hacer que los estudiantes reciten las tareas que ponía el profesor, para pensar y reflexionar sobre los procesos cognitivos que se movilizan en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En esta nueva perspectiva de la escuela se empiezan a vincular conceptos como pedagogía y didáctica, y posteriormente la psicología, antropología y sociología harían también su aporte para introducir aspectos a tener en cuenta en la educación.

La pedagogía y la didáctica son conceptos que desde sus principios generaron mucha expectativa en la escuela y de los cuales se han derivado diferentes definiciones a lo largo del tiempo. Primero fueron consideradas como lo mismo, después que una estaba inmersa en la otra, o que las dos son campos totalmente diferentes sin relación alguna, hasta llegar a pensarlas como campos diferentes que aportan a los procesos educativos relacionándose dialécticamente.

En la búsqueda por hacer una diferencia del objeto de estudio de la pedagogía y la didáctica, Vasco (s.f.) describe 5 tensiones que hay entre ambos conceptos que pueden ayudar a tomar decisiones al momento de tratar de definirlos. En su discurso, se puede entrever que la pedagogía está encaminada a ser una reflexión sobre la formación integral de los estudiantes, la cual se nutre de las teorías sociológicas, antropológicas, psicológicas, entre otras. Por su lado la didáctica es enfocada a estudiar de una manera más rigurosa los procesos de enseñanza y aprendizaje, no desligándose de la reflexión pedagógica, pero pensando y

creando formas, métodos y metodologías que permitan la aprehensión con sentido de las ciencias que se trabajan en la escuela por parte de los estudiantes.

La didáctica, como ciencia general, tiene sus raíces en pensadores como Quintiliano, San Agustín, San Isidoro, Juan Huarte de San Juan. Estos autores en sus discursos ya hablaban de motivación, intereses de los estudiantes, principios de educabilidad. Ellos argumentan sus propios modelos de enseñanza o aprendizaje, y dan aportes específicos para ir definiendo cada vez más el campo de la didáctica.

Entre los autores más reconocidos en el campo de la didáctica esta Comenio, el cual es mencionado por Carrasco (2011, pág. 15), expresando que:

[Comenio]... es el punto de partida de la construcción de la didáctica gracias a su obra "Didáctica Magna".

En ella plantea algunos principios clásicos, como que:

- ✓ La didáctica es una técnica y un arte.
- ✓ La enseñanza debe tener como objetivo el aprendizaje de todo por parte de todos.
- ✓ Los procesos de enseñanza y aprendizaje deben caracterizarse por la rapidez y la eficacia, así como por la importancia del lenguaje y de la imagen.

Carrasco manifiesta que autores como Claparède, Mattos, Nerici, entre otros, hacen referencia a la didáctica como herramienta para mencionar la enseñanza, lo práctico y normativo, así como las técnicas para orientar el aprendizaje.

La didáctica entonces tendrá que ver con preguntas como: ¿Qué se está enseñando? ¿Cómo se está enseñando? ¿Cómo están aprendiendo los estudiantes? ¿Siempre que se está enseñando, los estudiantes están aprendiendo? De esta forma la didáctica es una ciencia que, teniendo como base en su campo de estudio preguntas como estas, cada vez es más amplia y por eso se hace necesario

que los diferentes campos del saber se pregunten por la didáctica más pertinente para lograr en los estudiantes un aprendizaje a profundidad³.

Para especificar y profundizar en todos los aspectos de la didáctica, se hace necesario que las diferentes ramas del saber desarrollen su propia didáctica sin desconocer los principios de la general. Así se reconoce que, aunque todas las ramas se hagan las mismas preguntas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, las respuestas de cada una van a ser diferentes, pues su historia, epistemología y objeto de estudio son diferentes.

Dentro de la didáctica, la didáctica de las matemáticas, proveniente de la Educación Matemática, según D'Amore (2008, p. 4) "es el arte de concebir y de crear condiciones que pueden determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo". Así mismo concibe el aprendizaje como:

[...] un conjunto de cambios de comportamientos (por tanto de prestaciones) que señalan, a un observador predeterminado, según sujeto en juego, que este primer sujeto dispone de un conocimiento (o de una competencia) o de un conjunto de conocimientos (o de competencias), lo que implica la gestión de diversos registros de representación, la creación de convicciones específicas, el uso de diversos lenguajes, el dominio de un conjunto de referencias idóneas, de pruebas, de justificaciones y de obligaciones. Estas condiciones deben poder ser puestas en acción y reproducidas intencionalmente. D'Amore (2008, pág. 4)

De esta forma, la didáctica de las matemáticas tiene como finalidad facilitar y permitir el aprendizaje del conocimiento matemático por parte de los estudiantes, donde éste se pueda explorar en diferentes situaciones y manipular en distintos sistemas de representación, y así los estudiantes relacionen las representaciones haciendo

³ Teniendo en cuenta lo expresado por Coll (1988), el aprendizaje a profundidad se asume como el aprendizaje con sentido que un estudiante adquiere, el cual se ha enfrentado a múltiples representaciones de un mismo objeto de estudio, las relaciona entre sí y también con otros objetos de estudio y sus experiencias personales.

transformaciones por tratamiento y conversiones entre las mismas representaciones⁴.

Para hacer de la didáctica de las matemáticas una ciencia más rigurosa y rica en experiencias, el MEN (2006), para el desarrollo del pensamiento matemático, propone el siguiente un grupo de pensamientos y sistemas::

El pensamiento numérico y los sistemas numéricos

El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas

El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos

El pensamiento espacial y los sistemas geométricos

Entre estos tipos de pensamiento, el espacial y sistemas geométricos se caracteriza porque:

Contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos. MEN (2006, pág. 61)

⁴ A partir de lo expresado por Duval (1999), se hacen las siguientes aclaraciones: a) representación es aquel conjunto de imágenes y concepciones sobre un objeto de estudio y sus relaciones; b) sistema de representaciones es aquel en el que éstas, comparten las mismas reglas; c) tratamiento es la transformación que tiene una representación semiótica en otra dentro del un sistema de representaciones; d) conversión es la transformación que tiene una representación semiótica, que pertenece a un sistema de representaciones, en otra, que pertenece a otro sistemas de representaciones diferente.

4.2 Procesos cognitivos en el desarrollo del pensamiento geométrico

Dentro del desarrollo del pensamiento matemático se hace referencia al pensamiento geométrico y pensamiento espacial. El pensamiento geométrico hace alusión exclusivamente al campo conceptual de la geometría, en que tienen cabida las demostraciones rigurosas a partir de axiomas y teoremas. El pensamiento espacial incluye al pensamiento geométrico y su relación con lo cotidiano de los estudiantes, donde la habilidad espacial se sustenta, por ejemplo, en la ubicación de puntos en el plano cartesiano y también en la ubicación del mismo estudiante con respecto a su barrio, su ciudad y su país. En este trabajo se hará referencia al pensamiento geométrico [MEN (1998)] porque es la base conceptual para el desarrollo del pensamiento espacial.

En los procesos de enseñanza y aprendizaje para el desarrollo del pensamiento geométrico, los estudiantes se ven enfrentados a diferente información que les llega del exterior. Torregrosa y Quesada (2007) plantean la importancia de conocer como los estudiantes analizan y transforman esta información, en la medida que es más fácil hacer una intervención eficaz a los procesos de resolución de problemas si se tiene un conocimiento profundo de estos.

El desarrollo del pensamiento geométrico involucra tres procesos cognitivos: la construcción geométrica, la visualización y el razonamiento. Estos pueden ser realizados separadamente, “sin embargo, estas tres clases de procesos cognitivos están cercanamente conectados y su sinergia es cognitivamente necesaria para la competencia en geometría” (Duval, 2001). Es por esta razón que una descripción más detallada de estos procesos vislumbrará la importancia que tiene la exploración de los tres para que los estudiantes puedan relacionar los conceptos con su contexto y llevarlos a otros escenarios donde les permita resolver situaciones problema.

4.2.1 Construcción geométrica

Antes de ampliar un poco el proceso cognitivo de Construcción Geométrica, es importante mencionar a Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) que plantean la diferencia entre artefacto e instrumento, la propuesta de analizar el potencial semiótico de los artefactos y el ciclo didáctico.

Bartolini-Bussi y Mariotti manifiestan que un artefacto incluye objetos producidos por los seres humanos como los sonidos, los gestos, utensilios, formas de lenguaje natural, textos, libros, instrumentos musicales y científicos, herramientas de la información y la comunicación. Los artefactos cumplen una función de mediadores dado que por la parte personal, permiten que los estudiantes los usen para resolver una tarea, y por la parte del desarrollo de la matemática, el maestro aprovecha su uso y los signos y significados que los estudiantes forman alrededor de ellos para avanzar desde lo conceptual. Es esta doble función la que compone el potencial semántico de un artefacto.

Las autoras también mencionan el enfoque instrumental de Rabardel⁵, donde un artefacto es el material u objeto simbólico relacionado a un conocimiento específico y el instrumento se define como una entidad mixta, donde hay dos componentes. Sobre estos componentes, Camargo, Pérez, Plazas, Perry, Samper y Molina (2013, p. 89) expresan que son el “arte factual que tiene que ver con las características propias de la herramienta o partes de está y cognitivo que tiene que ver con los esquemas de utilización del sujeto cuando usa la herramienta al enfrentarse con una tarea específica”. A pesar de esta interpretación que se hace en el texto de Rabardel, continúan con lo expuesto inicialmente de artefacto e instrumento.

En el texto, Bartolini-Bussi y Mariotti (2008, p. 10) resaltan la importancia de un uso organizado e integrado del artefacto para que se pueda “explotar” al máximo

⁵ Texto al que se refieren las autoras para definir artefacto e instrumento.

su potencial semiótico. Por esta razón proponen una secuencia de enseñanza a la que llaman ciclo didáctico, compuesto por:

- ✓ Actividades con artefactos: los estudiantes son enfrentados a tareas que se llevarán a cabo con el artefacto.
- ✓ Producción individual de signos (por ejemplo, el dibujo, la escritura, y similares). Los estudiantes son enganchados en diferentes actividades semióticas, principalmente en relación con las producciones escritas.
- ✓ Producción colectiva de los signos (por ejemplo, las narraciones, mímica, producción colectiva de textos y dibujos), debates colectivos desempeñan un papel esencial en la enseñanza y el proceso de aprendizaje en el que el núcleo del proceso semiótico se llevará a cabo.

Bartolini-Bussi y Mariotti proponen un ciclo donde hay un reconocimiento y utilización de los artefactos y también el docente aprovecha su potencial semiótico para guiar el conocimiento de los estudiantes.

A continuación, después de aclarar la diferencia entre artefacto e instrumento, se ampliará el proceso de Construcción Geométrica, en lo que se hará evidente que este proceso cognitivo implica el vínculo entre la motricidad, los instrumentos de medida, las representaciones externas y la verificación de propiedades en los diseños.

Euclides (s.f.), compila lo que hasta ese momento se había construido en la geometría a partir de diferentes autores como Apolonio, Arquímedes y Tolomeo, según Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004). Esta recopilación tuvo tanta fuerza en su época y épocas posteriores que se convirtió en un legado obligatorio de saber y estudiar, inicialmente en clases sociales aristócratas y posteriormente en todas las instituciones educativas, con el fin de potencializar la rigurosidad del sistema deductivo que Euclides plantea.

La rigurosidad de esta geometría va desde la forma de hacer los razonamientos a partir del uso de axiomas y teoremas, hasta la utilización de instrumentos de medida con habilidad, destreza y precisión.

A partir de lo anterior, en especial, la regla y el compás pasaron de ser sólo herramientas y se convirtieron en artefactos que permitían a los estudiantes acceder a la comprensión de conceptos geométricos e indispensables para el desarrollo de la geometría, hasta el punto de llegar a discriminar a las personas que no los sabían utilizar. Sin embargo, la utilización de estos artefactos no tiene sus orígenes en la geometría, de ahí su carácter de artefacto, pues su construcción es antes que la aparición de Euclides en la historia.

Retomando a Múnera (2013), la revisión histórica que se puede realizar de la evolución y construcción de la regla, el compás y el transportador, los detalles son pocos, pues el énfasis está más en la aplicación que se ha hecho de ellos que en los motivos y creadores de los mismos.

Como el énfasis que se ha hecho de los instrumentos de medida está en su aplicación y no en su historia; para indagar sobre la construcción de los instrumentos de medida, se hace indispensable observar la aplicación que se hacía de ellos como artefactos, en las demostraciones geométricas rigurosas; y también hay que dar paso al análisis de las dificultades que en la antigüedad había para el desplazamiento por tierra y agua, para llevar a cabo las construcciones arquitectónicas y para solucionar problemas con los cultivos. Estas situaciones tuvieron como consecuencia desarrollar artefactos que permitieran tener más precisión frente a los fenómenos que se les podían presentar.

Culturas como la de los egipcios y babilonios (por mencionar algunas), dejaron legados físicos y por escrito (como los papiros de Rhind y Plimpton), donde muestran la forma en que concebían el mundo y las soluciones a las dificultades que iban enfrentando. De ahí se puede deducir que estos pueblos, lejos de querer hacer la construcción de teorías científicas, su intención era la solución de problemas de construcción o cultivo, sin negar que fueran un pilar fundamental para la construcción y estructuración de la matemática y geometría de hoy. Aquí, los instrumentos cumplían una función protomatemática, es decir, su interés

estaba en solucionar problemas tangibles de ubicación y medición, los cuales para generalizarse y resolverse de una manera más práctica, se trasladan al papel.

De esta forma, si los problemas se volvieron más abstractos y se trasladaron de medio, los instrumentos con los que se resolvían dichos problemas también se debían modificar. Estos problemas, siendo problemas tridimensionales, al momento de trasladarlos al papel se convierten en problemas bidimensionales; teniendo como consecuencia la caracterización de polígonos que les ayudaron a llegar a algunas soluciones. Es en ese cambio en el que la precisión de los artefactos permitió la conceptualización de nuevas propiedades y relaciones. Hoy en día, el acceso a los instrumentos de medida físicos o por medio de software de geometría dinámica es fácil, y aquí el docente debe vincular estos artefactos en el aula de manera paulatina y contextualizadamente, como medios de comprobación y de construcción, para que los estudiantes perciban su función desde la construcción y también desde la conceptualización.

Según Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004):

Como parte de ese esfuerzo de superar las limitaciones de la percepción, surgió la construcción geométrica. Podemos describirla como un dibujo técnico, en el que la utilización apropiada de ciertos instrumentos asegura la adecuación del dibujo a determinadas propiedades. La construcción geométrica tiene dos aspiraciones básicas: asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de la percepción necesariamente presentes en el dibujo y lograr una generalización, asegurando la reproductibilidad del dibujo, tomando en cuenta (únicamente) las propiedades fundamentales del mismo por medio de la utilización de instrumentos técnicos.

Los instrumentos de medida, vistos como artefactos, se introducen entonces en uno de los tres procesos cognitivos que involucran el desarrollo del pensamiento geométrico en los sujetos: el proceso de construcción geométrica. Sin embargo, no hay que desconocer la importancia de una relación dialéctica entre los tres procesos cognitivos para la comprensión de los objetos de estudio que se trabajan en geometría. Así mismo, Duval (2001) propone que estos procesos cognitivos se

desarrollen separadamente de forma que en su diferenciación, se pueda generar una coordinación entre los tres, y así en el paso de un sistema de representación a otro se pueda dar el desarrollo del pensamiento geométrico.

Desde Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), la diferencia entre un dibujo y una construcción geométrica, está en que la segunda implica la verificación de propiedades o es una consecuencia de las mismas y que puede ayudar a ser concluyente, mientras que la primera no necesariamente tiene esas implicaciones y es espontáneo y perceptivo; “adicionalmente, las construcciones añaden elementos conceptuales que ayudan a los estudiantes a reconocer y conectar las diferentes propiedades matemáticas necesarias para obtener, por ejemplo, una figura correcta, y posteriormente justificar por qué está correcta”.

4.2.2 Visualización

La visualización es un proceso cognitivo que está relacionado con el hecho que a partir de la observación de una representación, es posible generar conclusiones, comunicar y llegar a resolver situaciones. Duval (1998) citado por Torregrosa y Quesada (2007) al referirse a la visualización, manifiesta la importancia de tratar la diferencia entre figura y dibujo, dado que es necesaria la distinción entre el contenido de una representación y lo que representa; así figura es una imagen mental de un objeto físico y el dibujo es la representación gráfica de una figura.

Acerca de este proceso, Torregrosa y Quesada (2007, p. 279) expresan que:

El significado que atribuimos a la visualización se refiere a la transferencia que ocurre entre dibujo y figura...debemos resaltar que si visualizamos un dibujo podemos obtener un objeto mental que no tiene por qué ser el mismo para todos los observadores, ya que el dibujo está unido a unas afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades o relaciones) que la figura no posee, sino le son atribuidas por el observador

En este proceso cognitivo, los autores hacen referencia al término **aprehensión**, citando el Diccionario de la Real Academia Española (2001), como “aquella que capta las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas, sin afirmar o negar”, para presentar el significado de visualización.

Torregrosa y Quesada (2007) plantean tres tipos de **aprehensión**, que están involucrados con el proceso de visualización.

Aprehensión perceptiva: Se caracteriza como la identificación simple de una configuración, es decir, es un proceso intuitivo.

Aprehensión discursiva: Acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas, vínculo que se puede realizar de dos maneras:

- **Cambio de anclaje visual al discursivo:** En este tipo de anclaje el observador identifica en el dibujo las características de una figura o unas afirmaciones matemáticas.
- **Cambio de anclaje discursivo al anclaje visual:** el estudiante tiene la capacidad de realizar el dibujo con las características, sin la necesidad de implicar una asociación con la afirmación matemática.

Aprehensión Operativa: Este tipo de **aprehensión** se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Al igual que en la **aprehensión discursiva** se distinguen dos tipos:

- **Aprehensión operativa al cambio configural:** A la configuración inicial se le añaden nuevos elementos geométricos con el fin de dar solución a la situación planteada.
- **Aprehensión operativa de reconfiguración:** En este tipo de **aprehensión** se manipulan las sub configuraciones iniciales como las piezas de un

puzzle, interviniendo la aprehensión operativa de cambio figural inicial para reacomodar y manipular.

Es importante promover en los estudiantes los tres tipos de aprehensiones, sin embargo se debe potencializar la aprehensión discursiva y configural para articular la influencia de la aprehensión perceptiva en el desarrollo del pensamiento geométrico.

Gualdrón (2011) y Gutiérrez (2011) mencionan a Presmeg (1986) resaltando elementos en el proceso de visualización indispensables como las imágenes mentales. Estas son:

- Imágenes concretas: están hacen referencia a imágenes específicas y de características particulares.
- Imágenes patrón: están hacen referencia no a características particulares y concretas de los objetos sino a sus relaciones.
- Imágenes memoria de fórmulas: son las que están relacionadas a la visualización mental de relaciones o fórmulas.
- Imágenes cinéticas: se trata de imágenes que relacionan la parte física y la mental, donde se comunican, transforman o crean por medio de movimientos físicos.
- Imágenes dinámicas: son las que están vinculadas con la habilidad de mover y transformar imágenes u objetos.

Según Bishop (1989) citado por Gutiérrez (2011), los procesos que están vinculados en la actividad de visualización donde interactúan estas imágenes, son:

- Procesamiento visual: este proceso es el de conversión de una información a imagen visual y también el de las transformaciones que se dan de una imagen visual a otra.
- Interpretación de información: este proceso está relacionado con la comprensión e interpretación de las imágenes visuales con el fin de extraer la información que en ella se contiene.

Con el fin de movilizar, evidenciar y avanzar en las imágenes mentales que anteriormente se han expuesto, Gutiérrez (2011, p. 11), menciona a Del Grande (1990) con la descripción de las habilidades para la visualización, las cuáles son:

- **Coordinación motriz de los ojos.** Es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
- **Identificación visual.** Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Se utiliza, por ejemplo, cuando la figura está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando hay varias figuras superpuestas.
- **Conservación de la percepción.** Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene su forma aunque deje de verse total o parcialmente.
- **Reconocimiento de posiciones en el espacio.** Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia.
- **Reconocimiento de las relaciones espaciales.** Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
- **Discriminación visual.** Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales.
- **Memoria visual.** Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

4.2.3 Razonamiento

Torregrosa y Quesada (2007, pág. 288) plantean que el razonamiento puede ser entendido como “cualquier procedimiento que nos permita desprender nueva información de informaciones previas, ya sean aportadas por el problema o derivadas del conocimiento anterior”. Los autores, definen tres tipos de razonamiento en relación con los procesos discursivos: el proceso discursivo configural, el proceso discursivo natural y el proceso discursivo teórico, los cuales abarcan varios tipos de interpretación, que permite dar respuesta a un sinnúmero de situaciones mediante el uso de diferentes representaciones y nos permiten clasificar las características del razonamiento de los estudiantes.

Es importante resaltar que el razonamiento desde el proceso configural, se evidencia en el desarrollo mental de los estudiantes, cuando tienen la capacidad de abstraer información de un enunciado, para asociar afirmaciones geométricas con las características del enunciado (aprehensión discursiva), además de analizar la información con el fin de hacerle cambios a la configuración inicial del problema (aprehensión operativa), es decir, cuando se encuentra un equilibrio en la coordinación de la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa.

Por otro lado el razonamiento como proceso discursivo natural es proyectado de manera espontánea con el lenguaje natural, mediante la descripción, explicación o argumentación. Sin embargo para que los estudiantes avancen en este proceso, es necesario que distingan las operaciones discursivas básicas que aparecen en los enunciados geométricos, entendiendo dichas operaciones como conectores y símbolos, entre otros, que relacionan expresiones propias del área de estudio.

Finalmente el razonamiento como proceso discursivo teórico, necesariamente se enmarca en un desarrollo deductivo, el cual utiliza expresiones formales de la teoría, es decir, el estudiante tiene la capacidad de utilizar axiomas, teoremas y definiciones en la resolución de una situación dada, de la cual se desprenden

conclusiones que dan la posibilidad de replantear el problema para proponer otras situaciones.

Teniendo en cuenta que para los docentes es importante que los estudiantes evolucionen en los diferentes tipos de razonamiento, se debe entender que estos no llevan un orden específico y tampoco son excluyentes, por lo que todos pueden ponerse en práctica en la solución de una situación, además, es necesario comprender que la coordinación del razonamiento, el proceso cognitivo de visualización y el de construcción geométrica, sostienen una estrecha relación que permite que los estudiantes crezcan de manera integral en el desarrollo del pensamiento geométrico.

4.3 El modelo Van Hiele de desarrollo de pensamiento geométrico

Este modelo fue propuesto por los esposos Van Hiele en 1957 y desde entonces ha sido objeto de estudio y adaptaciones en la educación matemática y otras ciencias. El Modelo de Van Hiele está conformado por niveles de razonamiento⁶ (También llamados niveles de entendimiento⁷) y fases orientadoras para el aprendizaje. En los niveles de pensamiento se describen características del proceso de aprendizaje en el pensamiento geométrico, como son: "visualización"⁸,

⁶ Teniendo en cuenta lo expresado por Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009) y Torregrosa y Quesada (2007), en el Modelo de Van Hiele razonamiento se entiende como la comprensión de los conceptos que tiene los estudiantes, la cual permite que haya avance en el pensamiento geométrico. De ahí que el Modelo se divida por niveles de razonamiento, en los cuales se presentan diferentes planteamientos que se relacionan con los niveles anteriores y van teniendo cada vez más complejidad. La diferencia, que tiene con el proceso cognitivo, es que en el proceso el razonamiento se entiende como cualquier procedimiento que posibilita adquirir una nueva información a partir de una información previa.

⁷ Crowley (1987) llama a los niveles propuestos en el Modelo de Van Hiele, niveles de entendimiento.

⁸ Teniendo en cuenta lo expresado por Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009) y Torregrosa y Quesada (2007), en el Modelo de Van Hiele visualización es la percepción de las figuras como un todo, donde no se reconocen las partes y propiedades de las mismas. Esta idea de visualización se diferencia del proceso cognitivo, pues este último reconoce la visualización como la observación de una representación que posibilita llegar a conclusiones, comunicar y resolver situaciones problema.

"análisis", "deducción informal", "deducción formal" y "rigor". Auxiliado por experiencias instruccionales adecuadas, en el Modelo se afirma que el estudiante se mueve secuencialmente desde el nivel inicial o básico (visualización) hasta el más alto (rigor). El Modelo propone cinco fases orientadoras para el aprendizaje las cuales son: interrogación/información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración.

4.3.1. Niveles de entendimiento

Crowley (1987), describe los niveles de entendimiento, así:

Nivel 0 (nivel básico): visualización

En esta primera etapa, los estudiantes están conscientes del espacio sólo como algo que existe alrededor de ellos. Los conceptos geométricos se ven como entidades totales, como algo provisto de componentes o atributos.

Nivel 1: Análisis

En nivel 1 comienza un análisis de los conceptos geométricos. Por ejemplo, a través de la observación y la experimentación, los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas.

Nivel 2: Deducción informal

Aquí los estudiantes pueden establecer las interrelaciones en las figuras (imagen mental) y entre figuras. Así, se pueden deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases. Las definiciones adquieren significado. Sin embargo, el estudiante en este nivel, no comprende el significado de la deducción como un todo ni el rol de los axiomas. Algunos resultados obtenidos de manera empírica se usan a menudo conjuntamente con técnicas de deducción. Se pueden seguir pruebas formales; pero los estudiantes

no ven como el orden lógico podía ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes o no familiares

Nivel 3: Deducción formal

En este nivel se entiende el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica con un sistema de axiomas, postulados, definiciones, teoremas y demostraciones. Un estudiante puede construir demostraciones, percibir la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entender la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distinguir entre una afirmación y su recíproca.

Nivel 4: Rigor

En esta etapa el estudiante puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Pueden estudiarse geometrías no euclidianas y compararse diferentes sistemas. La geometría se capta en forma abstracta.

El modelo Van Hiele afirma que el avance a través de los niveles de entendimiento depende más de la instrucción recibida y las experiencias que de la edad o madurez. Así, el método y organización de la instrucción, además del contenido y los materiales empleados, son áreas importantes de referencia pedagógica. Como teoría diferente, es importante reconocer que la teoría del desarrollo intelectual propuesto por Piaget es por etapas evolutivas, donde la edad de las personas establecerá el estadio de desarrollo en el que se encuentra. A partir de la edad, Piaget hace un reconocimiento de las habilidades que las personas pueden tener. La presente investigación se basa en los postulados propuestos en el Modelo de Van Hiele, porque se considera que la instrucción planteada por el docente en el aula, puede movilizar cognitivamente a los estudiantes para ejecutar y desarrollar el proceso cognitivo de Construcción Geométrica.

4.3.2. Fases orientadoras para el aprendizaje

Para llevar a cabo esos principios, el Modelo Van Hiele afirma que la enseñanza desarrollada de acuerdo con una secuencia, promueve la adquisición de un nivel de entendimiento y su avance al nivel siguiente. Es por esta razón que propone cinco fases secuenciales de enseñanza: indagación, orientación directa, explicación, orientación libre e integración, las cuales según Piedrahita, Londoño y Uribe (2009), se describen así:

Fase 1: Interrogación/Información

En esta etapa, el maestro y los estudiantes llevan a cabo conversaciones y actividades acerca de los objetivos de estudio para ese nivel. Se hacen observaciones, se plantean preguntas y se introduce el vocabulario específico de cada nivel. El propósito de esa actividad consiste en primer lugar, en que el maestro aprende qué conocimiento previo tienen los estudiantes acerca del tema y, en segundo, los estudiantes aprenden en qué dirección se dará el estudio del mismo.

Fase 2 Orientación dirigida

Los estudiantes exploran el tema de estudio mediante materiales que el maestro ha ordenado cuidadosamente. Esas actividades podrían revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel. Así, la mayoría de los materiales serán tareas breves, diseñadas para lograr respuestas específicas.

Fase 3 Explicación

Al construir sobre sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus opiniones acerca de las estructuras que han estado observando. Aparte de auxiliarlos en el uso de un lenguaje cuidadoso y apropiado, el papel del maestro es mínimo. Es durante esa fase que el sistema de relaciones del nivel comienza a hacerse claro.

Fase 4 Orientación libre

Los estudiantes se encuentran con tareas más complejas: tareas con muchos pasos, tareas que pueden ser desarrolladas de varias maneras y tareas de final abierto.

Fase 5: Integración.

Los estudiantes repasan y resumen lo que han aprendido. El maestro puede apoyarse en estas síntesis, proporcionando perspectivas globales de lo que los estudiantes han aprendido.

Y al final de la quinta fase, los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de pensamiento. El nuevo dominio de pensamiento reemplaza al viejo y están listos para volver a experimentar las fases para el aprendizaje en el siguiente nivel.

4.4 Motricidad

El manejo de los instrumentos de medida, vistos como artefactos, implica, a parte del conocimiento sobre los alcances de los mismos, una adecuada motricidad fina. Esta permitirá que los estudiantes realicen con precisión diseños de diferentes cuerpos y figuras en papel o en diferente software de geometría dinámica. Por tal razón, a continuación se presentan algunas definiciones de motricidad y los elementos que la componen.

Algunos autores expresan que la motricidad es una parte de la psicomotricidad. Por ejemplo, Ardanaz (2009, p. 1) expresa que el término psicomotricidad “integra las interacciones cognitivas, emocionales, simbólicas y sensoriomotrices en la capacidad de ser y de expresarse en un contexto psicosocial... también desempeña un papel fundamental en el desarrollo armónico de la personalidad”. De esta manera, la psicomotricidad relaciona los elementos físicos, cognitivos y psíquicos de una persona.

Ardanaz menciona dos tipos de psicomotricidad, los cuales son:

- **La psicomotricidad gruesa:** está relacionada con el control del cuerpo como una totalidad donde se involucran diferentes extremidades y se hacen diferentes movimientos corporales y desplazamientos. En esta psicomotricidad se distingue entre el dominio corporal dinámico y el dominio corporal estático, donde en el primero se involucran diferentes movimientos y la coordinación y equilibrios de varias extremidades, mientras que la segunda involucra la tonicidad⁹, el autocontrol, la respiración y la relajación. Es de aclarar que la psicomotricidad de dominio corporal estático no implica que necesariamente una persona este en un estado de reposo.
- **Psicomotricidad fina:** está relacionada con todas aquellas actividades que implican precisión y mucha coordinación entre varias partes del cuerpo. Esta coordinación incluye:
 - a. **Coordinación visomanual:** la cual conduce al dominio de la mano y es la capacidad de hacer ejercicios de acuerdo con lo que ha visto.
 - b. **Fonética:** está relacionada con el lenguaje oral
 - c. **Motricidad gestual de la mano:** el dominio de cada uno de los elementos que componen la mano.
 - d. **Motricidad facial:** el dominio de los músculos de la cara para comunicarse y relacionarse.

Igualmente, Ochoa (2007) habla de psicomotricidad mencionando que el aspecto psíquico y motriz no se desliga, pues las personas manifiestan lo que piensan, sienten y se descubren a ellos mismo y a los demás a través del movimiento. Es a partir de la relación que hay entre lo psíquico y el movimiento, que el estudiante podrá acceder más fácilmente al aprendizaje.

Ochoa (2007) citando a Comellas y Perpiniya (2003) menciona cinco componentes de la psicomotricidad:

⁹ Tonicidad, para Ardanaz (2009), se refiere al control del cuerpo y los músculos. Por ejemplo, en los bebés, la tonicidad se refleja cuando comienzan a manejar el cuello y sostener la cabeza.

- ✓ Elementos neuromotores de base: este componente está relacionado con tonicidad y autocontrol.
- ✓ Motricidad gruesa: este componente está relacionado con el dominio corporal dinámico y el dominio corporal estático. El primero está compuesto la coordinación general como el rastrear, gatear, andar, correr, entre otros y movimientos simultáneos; equilibrio dinámico en el plano horizontal, vertical y móvil; y la coordinación visuomotriz en arcos, pelotas y cuerdas. El segundo está compuesto por la respiración, relajación y equilibrio estático.
- ✓ Motricidad fina: este componente está relacionado con motricidad gestual, coordinación manual, coordinación visuomanual, coordinación grafoperceptiva y motricidad facial.
- ✓ Esquema corporal: este componente está relacionado con el conocimiento de diversas partes del cuerpo, comprensión del movimiento y su función, conciencia del eje corporal y sus giros, maduración espacial, ritmo y tiempo, y lateralización.
- ✓ Espacio-tiempo: este componente está relacionado con la orientación y estructuración¹⁰.

Con respecto a la coordinación en la motricidad fina, Ochoa (2007) menciona que puede ser fácilmente observable desde los 9 meses de nacimiento donde los niños comienzan a hacer pinzas con los dedos para coger objetos, luego comienzan a garabatear dibujos y usar sus manos para comer. Siendo un proceso paulatino, aproximadamente a los 3 ó 4 años, pueden usar herramientas como las tijeras y el lápiz correctamente. En la edad de 3 y 4 años, también van adquiriendo

¹⁰ Estructuración, para Ochoa (2007), se refiere a la capacidad constante que tiene el niño para localizar su propio cuerpo y los objetos que lo rodean teniendo diferentes puntos de referencia.

el reconocimiento de arriba, abajo, delante y detrás, para en años siguientes especificar más la posición de un objeto con respecto a un plano (sobre, encima de, entre otras). En estas edades los niños comienzan a realizar trazos un poco más finos. Entre los 5 y 6 años, los niños van adquiriendo la orientación espacial básica y diferencian su propio cuerpo del cuerpo de su compañero. De ahí en adelante, el trabajo con la motricidad es el refinamiento y la precisión de los trazos que se les propongan a los niños.

Uno de los elementos que está en el desarrollo de la psicomotricidad es la lateralidad, como aquella predominancia de los elementos de una de las dos partes del cuerpo: derecha o izquierda.

Sobre lateralidad, Ochoa (2007) menciona la importancia de la diferenciación entre la derecha y la izquierda. Según Piaget (s.f.) citado por Ochoa (2007), las nociones de derecha e izquierda pasan por tres estadios:

1. De los 5 a los 8 años, donde la derecha y la izquierda son diferenciadas desde un punto de vista subjetivo.
2. De los 8 a los 11 años, donde la derecha y la izquierda son diferenciados desde el punto de vista de los demás y del interlocutor.
3. De los 11 a los 12 años, donde son diferenciadas teniendo en cuenta su naturaleza, sea la del propio niño o la de otra persona.

4.5 Comunicación

Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009), expresan que el aprendizaje se da gracias a la adquisición de ciertas estructuras cognitivas. Mencionando la teoría Psicogenética de Piaget, Piedrahíta, Londoño y Uribe expresan que la organización mental está constituida por estructuras y las estructuras por esquemas relacionados. Por otro lado, mencionan el modelo constructivista donde el aprendizaje se da en la estructura desequilibrio-reordenación- equilibrio. Esta

estructura permite que el estudiante no se conforme con lo que ha aprendido, y a partir de ese equilibrio que le generó el saber que tiene, el docente proponga otras dinámicas y conceptos que posibilite el movimiento de ese saber y así entre de nuevo en la estructura.

Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009) expresan que, con respecto a la teoría cognitiva, los significandum que el docente comunica adquieren significado en los estudiantes cuando estos los decodifican a través del lenguaje (entendido este como un sistema de signos y símbolos). De esta forma el proceso de aprendizaje será un proceso de comunicación, donde hay una constante codificación de mensajes, permeando también el proceso de enseñanza. Hay que aclarar que el aprendizaje no se dará por el solo hecho de comunicar un significado, pues la decodificación de un mensaje dependerá de los esquemas de cada estudiante. De igual forma, los autores expresan que la manera en que el mensaje se convierte en un producto de aprendizaje aún se sigue debatiendo, sin embargo se pueden identificar algunos elementos en el proceso comunicativo que inciden en el aprendizaje, los cuales son:

- ✓ Emisor: este rol lo asume el docente. Él debe ser el que planifica, controla y ejecuta el proceso comunicativo. Algunas condiciones que debe cumplir para su rol son: habilidad comunicativa, nivel de conocimientos, referencia al marco socio-cultural. El docente debe tener la habilidad de codificar el mensaje de tal manera que permita ser decodificado por el estudiante (receptor) suscitando motivación e interés. Así mismo, el docente deberá, antes de comunicar un mensaje, indagar y conocer el lenguaje que el estudiante maneja, los mensajes que previamente ha decodificado y el contexto socio- cultural en el que está inmerso.
- ✓ Receptor: este rol lo asume el estudiante siendo el más importante en el proceso comunicativo. El éxito de la decodificación del mensaje está

relacionada con las habilidades de escuchar, leer y pensar del estudiante y las actitudes que este tenga frente al mensaje.

- ✓ Mensaje: este se refiere a los conocimientos y modelos comportamentales que se quieren comunicar. Citando a Berlo (1960), Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009) mencionan tres factores que debe tener el mensaje: el código (el código puede ser lingüístico, gráfico, gestual, o en otros términos, estar en cualquier sistema de representaciones; el docente debe seleccionar este cuidadosamente dependiendo de la situación en la que quiere comunicar el mensaje), el contenido (los contenidos estarán relacionados con los objetivos que tenga el acto comunicativo, su estructura progresiva para hacerlo asequible y que permitan en el receptor una posición crítica y reflexiva) y la forma de transmitirlo (este debe responder a los propósitos del emisor y las características del receptor). El código como uno de los elementos más fuertes del mensaje, debe ser variado con el fin de comunicar al estudiante el mensaje desde diferentes registros de representación y permitir un aprendizaje más profundo del contenido.

- ✓ Canal: hace referencia al medio de soporte del contenido del mensaje. Estos pueden ser un software, los libros, las imágenes, las palabras. El docente debe tener claridad frente al canal que utilizará pues a la vez que este transmite el mensaje, tiene su propio sistema de signos.

Con respecto al proceso comunicativo, Tamayo (2009) expresa que el lenguaje es “un sistema de recursos para crear significado”. En concordancia con lo expresado por Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009), la realidad y los significados son constantemente reconstruidos por cada sujeto a través del lenguaje, por lo que el docente, como se mencionaba anteriormente, debe conocer el contexto de los estudiantes para que por medio de la palabra y del lenguaje que el estudiante maneja, aprenda y construya sentido alrededor del contenido científico y de cómo expresar el mismo.

El lenguaje cotidiano y científico comprenden los diferentes registros de representación en los que se expresa un mensaje propio del contenido en el que estén inmersos. De acuerdo con el contexto especificado para el uso del lenguaje, se van a utilizar registros de representaciones como el simbólico, pictórico, gráfico, discursivo, entre otros.

Desde Tamayo (2009) se puede deducir que el aprendizaje será el producto de la dialéctica entre el lenguaje y las estructuras mentales del estudiante. Primero, porque el proceso comunicativo no tendrá una sola vía, en la medida que el estudiante comunica por medio del lenguaje sus ideas y formas de conceptualizar es retroalimentado por el docente o por sus compañeros. Segundo, porque “la palabra y con ella el lenguaje, son una unidad de generalización y de comunicación” (2009, p. 156); y son esa unidad por el sentido que el estudiante construye del contenido científico al poderlo deducir, analizar, autorregular e interpretar (decodificar) y luego evocarlo para acceder a otro contenido científico. Tercero, el aprendizaje implicará no sólo una nueva estructura semiótica para el estudiante sino también una nueva forma de pensar y ver la realidad, lo que permeará los nuevos contenidos científicos que le presenten.

El MEN (2006) describe la comunicación matemática como el proceso deliberado y cuidadoso donde los estudiantes, haciendo uso del lenguaje matemático y sus diversos registros de representación, discuten a cerca del conocimiento matemático (comprendido como el conocimiento conceptual, caracterizado por su carga teórica, y el conocimiento procedimental, caracterizado por las acciones, técnicas y estrategias para transformar, decodificar y codificar las representaciones) para encontrar y establecer relaciones entre los mismos. Dentro de las matemáticas el conocimiento, lenguaje y comunicación se harán cada vez más específicos de acuerdo con los objetos de estudios que se trabajen, sean desde la aritmética, el algebra, la estadística o la geometría. En geometría, los de representaciones más usados son: gráfico, pictórico, lenguaje simbólico y lenguaje natural. Especialmente, los estudiantes en quinto grado de escolaridad básica, los

sistemas de representaciones que más utilizan son: pictóricos, lenguaje natural y apenas están conformando el lenguaje simbólico.

4.6 Los triángulos

El triángulo como un tipo de polígono es definido por Jara y Ruiz (s.f.) como “la región (cerrada) del plano delimitada por tres segmentos que se cortan de dos a dos en sus extremos”. Los elementos que se pueden identificar en un triángulo son:

- **Vértices:** estos son los puntos de intersección de los segmentos que componen el triángulo.
- **Lados:** son los segmentos que delimitan el triángulo.
- **Ángulos:** son formados por los lados del triángulo.

Otros elementos susceptibles de estudio en un triángulo son sus líneas notables como: la altura, mediana, mediatriz y bisectriz, así como su perímetro y área.

Los triángulos reciben diferentes nombres de acuerdo con sus características. Jara y Ruiz (s.f.) y Pérez, Palacios y Villamizar (1995) mencionan solo tres tipos de triángulos, con todos los teoremas que generan sus características, los cuales son: el isósceles, el equilátero y el rectángulo.

Por otro lado Londoño y Molano (2007) mencionan los triángulos equilátero, isósceles, escaleno y rectángulo. Mientras que Cardona (s.f.) expresa que los triángulos se clasifican así:

Según la amplitud de sus ángulos:

- **Acutángulo:** triángulo que tiene sus tres ángulos interiores agudos.

- **Rectángulo:** triángulo que tiene un ángulo interior recto.
- **Obtusángulo:** triángulo que tiene un ángulo interior obtuso

Según la longitud de sus lados:

- **Equilátero:** triángulo que tiene sus tres lados de igual longitud
- **Isósceles:** triángulo que tiene dos lados de igual longitud.
- **Escaleno:** triángulo que tiene sus tres lados de diferentes longitudes.

4.6.1. Enseñanza de los triángulos

Fraile (1999) y Melo (2001) en sus libros de texto escolar para el grado quinto de educación básica, cuando abordan el concepto de triángulo para enseñar a los estudiantes, previamente han hecho un reconocimiento de los polígonos, sus características y nombres según el número de lados. Estos libros presentan los nombres de los triángulos, sus características y la construcción con regla y compás de los mismos. El transportador lo presentan como instrumento para hacer medición no para el diseño de ángulos, de manera que el estudiante pueda identificar el nombre del triángulo según la amplitud de sus ángulos.

La enseñanza de los triángulos, abordada desde el libro de texto escolar, se presenta a partir de su relación con prismas y pirámides, y basan sus explicaciones en las construcciones de los triángulos isósceles y equilátero.

Mora (s.f.), en su texto, menciona que teniendo previo contacto con los nombres y formas de varios polígonos, se le pueden presentar a los estudiantes diversos tipos de triángulos con diferentes características y se les enseña los nombres de los triángulos según la longitud de sus lados y de sus ángulos. Es un trabajo inicialmente muy visual, donde la construcción de los triángulos con los instrumentos de medida no se profunda. Así mismo, expresa que se pueden

introducir las combinaciones (de características según los lados y de características según los ángulos) que hay de triángulos, donde los estudiantes descubran que hay unas que no son posibles, como: equilátero obtusángulo y equilátero rectángulo. Esto permite posteriormente que los estudiantes puedan deducir que un triángulo debe cumplir la condición de que la medida de cualquier lado tiene que ser mayor a la suma de las medidas de los otros dos lados. Mora profundiza más en la clasificación y características que en la construcción. Así los estudiantes, posteriormente, pueden acceder a la comprensión de las líneas notables, criterios de congruencia y semejanza para luego hacer aplicaciones en trigonometría y cálculo.

4.6.2 Aprendizaje de los triángulos

Es importante mencionar que MEN (2006) propone antes de estudiar los triángulos que los estudiantes hayan hecho un reconocimiento de objetos tridimensionales, la horizontalidad, verticalidad y perpendicularidad. También que sus experiencias se hayan acercado al dibujo de figuras bidimensionales¹¹. Este reconocimiento y dibujo permitirá que posteriormente, en el grado cuarto o quinto, los estudiantes hagan el reconocimiento de ángulos, vértices y lados de los polígonos, así como la construcción, con ayuda de los instrumentos de medida, de cuerpos geométricos y figuras bidimensionales, entre ellas el triángulo.

Desde el MEN (2006), la manera en que los estudiantes se deben acercar al concepto, construcción y caracterización del triángulo es desde lo macro hasta lo micro, donde primero se hace un reconocimiento de su forma y en que cuerpos se puede encontrar, para posteriormente hacer descripciones de características y propiedades que en él se encuentran, como: líneas notables, perímetro, área, entre otros. Igualmente, MEN (1998) reconoce los niveles de desarrollo del

¹¹ Generalmente polígonos y círculos.

pensamiento espacial propuestos en el Modelo de Van Hiele; y la propuesta de Geometría Activa la cual pretende, desde el juego con sistemas concretos, experiencias con el manejo del espacio y movimientos; como modos de organizar el aprendizaje de la geometría por parte de los estudiantes

El siguiente esquema refleja los elementos tenidos en cuenta para el marco teórico:

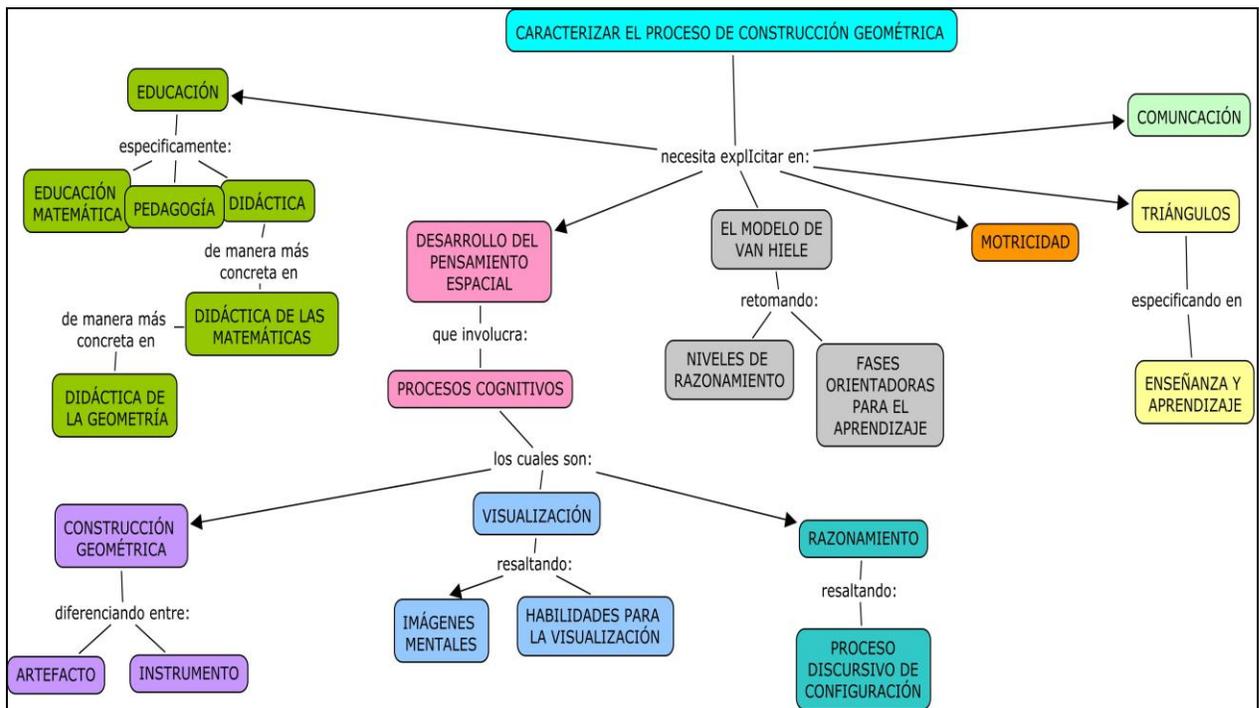


Ilustración 2: Ruta para el marco teórico

5. Estado del arte

En los antecedentes revisados para esta investigación, se pudieron identificar algunos enfoques de los proyectos de investigación anteriores sobre el pensamiento geométrico. Entre estos enfoques están el análisis de los procesos cognitivos de Visualización y Razonamiento en diferentes conceptos geométricos,

el concepto de artefacto, el Modelo de Van Hiele y el trabajo que se está realizando con diversos software de geometría dinámica como Cabri y Geogebra. Es importante mencionar que la mayoría de las investigaciones que involucran el proceso cognitivo de Construcción Geométrica son enfocados a software de geometría dinámica, donde el interés es mostrar la aplicabilidad del software para potencializar los procesos cognitivos de Visualización y Razonamiento. Algunos trabajos de investigación con este enfoque son: Aranda y Callejo (2011); Ramírez (2014); Ballesteros y Rojas (2011); Sángari y Pérez (2011); Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004); y Quijano (2011).

Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) presentan los procesos cognitivos de Visualización, Razonamiento y Construcción Geométrica, y abordan las tecnologías computacionales, enfocadas en software de geometría dinámica, como mediadores del aprendizaje del estudiante, las cuales aportan al desarrollo del pensamiento geométrico. También, presentan las experiencias de algunos docentes que participan en el proyecto titulado “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación básica secundaria y media de Colombia”, en el cual se pretende invitar a los docentes a reflexionar sobre las herramientas que ofrecen las tecnologías computacionales y las ventajas que pueden implicar en los procesos de enseñanza y aprendizaje del pensamiento geométrico. Sobre el proceso de Construcción Geométrica, Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), expresan que este proceso cognitivo esta entre lo perceptual y el discurso teórico deductivo de la geometría, en el que se encuentran la exploración y la creatividad que los estudiantes van desarrollando a lo largo de su paso por la escuela. Las construcciones geométricas (que en la presente investigación se nombran como diseños) tienen como proposito superar la percepción, asegurando propiedades de las figuras y haciendo uso adecuado de ciertos instrumentos de medida. De esta manera, los estudiantes pueden realizar construcciones geometricas (diseños) que cumplan con condiciones específicas, corroborar propiedades y descubrir otras que no estaban explicitas.

Esta importancia que tienen los diseños dentro del desarrollo del pensamiento geométrico es un elemento que se amplía en el presente trabajo investigativo. Dentro de sus conclusiones, Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), expresan que el trabajo con software de geometría dinámica (Cabri) favorece el avance en los niveles de argumentación gracias a la exploración y sistematización que posibilita, reconociendo relaciones entre propiedades y patrones. Para la presente investigación, el texto de Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), llama la atención por los grados de educación escolar en los que se realizan diseños con la ayuda del software, dado que se proponen actividades a partir del grado sexto de educación básica. Estos grados de educación básica y media implicarán que los estudiantes hayan tenido experiencias desde el material concreto e instrumentos de medida físicos, y estas experiencias permitirán que puedan acceder fácilmente a las actividades propuestas desde el manejo de Cabri. Por lo que es necesario, en grado de escolaridad primarios, favorecer las experiencias antes mencionadas.

Villiers (1996, p. 1) expresa:

En estos programas las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y en un lenguaje que son muy próximos a los que se usan en el universo familiar de "papel y lápiz". En contraste con la construcción de papel y lápiz, la geometría dinámica es precisa y es muy fácil y rápido realizar construcciones complejas para luego modificarlas.

De esta forma, Villiers manifiesta que el trabajo que se puede hacer con los diversos programas de geometría dinámica está relacionado con el proceso de razonamiento. Esta relación se teje en la medida que los estudiantes demuestran teoremas o realizan ejercicios en el software y lo usan como medio de verificación de hipótesis. Las demostraciones tendrán el acento en los argumentos que los estudiantes expresan sobre lo que observan en el programa. Estos argumentos

permitirán llegar a generalizaciones que más adelante, cuando los estudiantes tengan más dominio conceptual, podrán demostrar con rigurosidad.

De igual manera, Aranda y Callejo (2011) en su trabajo “Aproximación al concepto de función primitiva: un experimento de enseñanza con applets de geometría dinámica”, realizan un experimento donde se hace uso de algunos applets de Geogebra. Expresan las ventajas que tienen estas herramientas al momento de optimizar los procesos en el aula gracias a la rapidez de los trazos, los acercamientos y arrastres que se pueden hacer en una misma representación de derivadas e integrales. Los autores manifiestan que esta experimentación se limita al momento de usar exclusivamente los instrumentos físicos de construcción. En sus conclusiones, los autores manifiestan que los estudiantes, gracias al software, pueden relacionar más fácilmente los conceptos, en este caso la función y su primitiva, y lo importante que fue el uso de los applets para hacer tratamientos entre las representaciones.

En la misma línea del uso de software de geometría dinámica se encuentra Ramírez (2014) y Ballesteros y Rojas (2011). Ramírez, por un lado, en su investigación “Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo Van Hiele y Geogebra”, relaciona el trabajo de Geogebra con la construcción y caracterización de triángulos y cuadriláteros, donde se especifican y re-significan las habilidades e imágenes mentales que los estudiantes usan en este proceso de conceptualización y se analizan los avances de los estudiantes teniendo como referente el Modelo de Van Hiele con sus niveles de entendimiento y algunas fases para el aprendizaje; en sus conclusiones expresa el avance en los niveles de entendimiento que se observaron, organizando el trabajo con los estudiantes, a partir de las fases para el aprendizaje del Modelo de Van Hiele y el avance que suscitó el uso del software en el proceso cognitivo de Visualización. Para la presente investigación se tienen en cuenta las fases orientadoras para el aprendizaje propuestas por el Modelo de Van Hiele,

para acercar a los estudiantes a los diseños de triángulos, teniendo en cuenta los avances mostrados por Ramírez en su trabajo.

Por otro lado, Ballesteros y Rojas en su trabajo “Conceptualización de área del rectángulo con la medición del programa Cabri Geometry”, realizan la implementación de Cabri con estudiantes de secundaria, con el fin analizar la conceptualización de área del rectángulo. Este trabajo lo realizaron permitiendo que los estudiantes interactuaran con el software para hacer construcciones a partir de instrucciones dadas y luego hacer una contrastación entre los datos y la construcción, permitiendo hacer un análisis desde el proceso de visualización y razonamiento; en sus conclusiones, los autores destacan la importancia de unas condiciones necesarias en el diseño de una actividad para que se beneficie la producción de conocimiento por parte del estudiante a partir de uso del software.

En la presente investigación se tuvo en cuenta la relación entre los procesos cognitivos de Visualización y Razonamiento, como lo proponen Ballesteros y Rojas, en la verificación de diseños desde lo visual y lo discursivo.

Con la idea de obtener construcciones más ágiles a las que se pueden hacer con el uso de la regla y el compás físicos, SÁNGARI y PÉREZ (2011) en su trabajo “Construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia de Geogebra”, propusieron la construcción de polígonos regulares en el software Geogebra. En este trabajo se hace un aporte importante a las demostraciones de estas construcciones. En esta investigación es observable la relación que hay entre el proceso de razonamiento y el software de geometría dinámica, donde los autores resaltan, en las conclusiones, el beneficio de los applets cuando los estudiantes realizan demostraciones.

Ayudando el uso de los programas de geometría dinámica, Quijano (2011, p. 287) citando a Laborde, Laborde, Moreno, Vasco y Acosta (2003) expresa que:

Cabri cobró importancia en el estudio de la geometría por ser un sistema de representación que modela los elementos geométricos y permite la

manipulación de éstos, teniendo en cuenta que las representaciones forman parte de los elementos que se van estructurando en la interacción entre el sujeto y el concepto que se está formando, esto enfocado siempre en la geometría euclidiana

Quijano en su trabajo “Cabri como herramienta didáctica en la Institución Educativa Rural”, resalta las herramientas que ofrece el software en la modelación y animación de los elementos geométricos. Estas herramientas fortalecen el proceso de visualización en los estudiantes permitiendo observar diferentes propiedades que con lápiz y papel requerirían de más tiempo. Su trabajo se enfoca en la identificación de características con la ayuda del software. En sus conclusiones, el autor expresa que el uso del software contribuyó para que los estudiantes lanzaran hipótesis en la formulación de conjeturas sobre los conceptos trabajados con la ayuda de los applets.

Desde otro contexto pero en la línea del desarrollo del pensamiento geométrico, Osorno (2014) en su investigación “Propuesta integradora para el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes con discapacidad intelectual”, relaciona el proceso de visualización con el reconocimiento de cuerpos geométricos en estudiantes con discapacidad intelectual. Su objetivo principal estaba centrado en analizar el avance de los estudiantes teniendo como base las fases para el aprendizaje del Modelo de Van Hiele, en el diseño y aplicación de una unidad didáctica. Osorno plantea, así como Ramírez (2014) las fases para el aprendizaje del Modelo de Van Hiele, por lo cual en la presente investigación se retomaron.

Sobre el proceso de visualización, Gutiérrez (2011, p. 4) expresa “los profesores suelen poner más énfasis en las definiciones que en los ejemplos, sin darse cuenta de que son los últimos los que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo”. Es claro que la relación entre el proceso de Razonamiento y Visualización es estrecha, sin embargo, el autor hace una apuesta por el proceso de visualización como eje fundamental para el aprendizaje de los conceptos geométricos. Gutiérrez también retoma a

Presmeg (1986) y Bishop (1989) con la propuesta de las imágenes mentales y a Del Grande (1990) con habilidades para la visualización. Tanto las habilidades como las imágenes mentales fueron retomadas en la presente investigación para la caracterización del proceso de Construcción Geométrica.

Un aspecto importante que se consideró en el estado del arte fue los antecedentes que hay sobre la concepción de los instrumentos de medida y su aporte en el desarrollo del pensamiento geométrico. Al respecto, Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) describen y analizan el potencial semiótico de los artefactos en la construcción de significados. Los artefactos cumplirán una función de mediadores, desde lo personal, permitiendo que los estudiantes los usen para resolver una tarea matemática donde el maestro aprovecha su uso y los signos y significados que los estudiantes forman alrededor de ellos, para avanzar conceptualmente. En el texto, las autores resaltan la importancia de un uso organizado e integrado del artefacto para que posibilite “explotar” al máximo su potencial semiótico. En el uso del artefacto, Bartolini-Bussi y Mariotti expresan la importancia de un ciclo didáctico que permitirá el uso adecuado de los artefactos y que, a su vez, ellos sean unos mediadores en la conceptualización. Por otro lado expresan que un instrumento es el material u objeto simbólico relacionado a un conocimiento específico. En su trabajo también plantean el ciclo didáctico como tres pasos necesarios para que los artefactos favorezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Teniendo en cuenta lo expresado por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008), en la presente investigación se diferenció entre instrumento y artefacto, retomando la importancia de estos en el proceso de Construcción Geométrica.

A partir de la revisión bibliográfica expuesta anteriormente, es notoria la preferencia que los investigadores actualmente tienen frente a los trabajos con software de geometría dinámica, como por ejemplo Cabri y Geogebra. También hay otros trabajos que exploran las relaciones entre los procesos cognitivos de visualización y razonamiento en algún concepto o con respecto a algún software.

Se reitera que, aunque el trabajo de Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) tiene una aproximación a partir del concepto de ciclo didáctico, los trabajos de investigación en geometría no se han enfocado en explorar la Construcción Geométrica como un proceso cognitivo en el desarrollo del pensamiento geométrico, ni con el uso de los instrumentos de medida tradicionales como la regla, el compás y el transportador; ni con las herramientas que ofrecen los software de geometría dinámica.

6. Diseño metodológico

El diseño metodológico que a continuación se expone responde a los elementos que se tuvieron en cuenta para el desarrollo de este trabajo de investigación. Describe el tipo de investigación, las etapas de la investigación y la población y muestra afectada por la misma. El diseño fue pensado, estructurado e implementado con el fin de responder al objetivo de la investigación.

6.1. Tipo de investigación

A partir de lo expresado por Hernández, Fernández y Baptista (2010), esta investigación fue cualitativa, con un enfoque descriptivo; con el propósito de explorar las relaciones sociales que se vivieron en el aula durante el desarrollo de la unidad didáctica y describir los aportes, comentarios y diseños de los estudiantes. El enfoque descriptivo, permite especificar propiedades y características del fenómeno que se está estudiando, lo que posibilitó en esta investigación especificar las características del proceso de Construcción Geométrica con base al trabajo de los estudiantes con los instrumentos de medida.

Teniendo en cuenta a Hernández, Fernández y Baptista (2010), en la investigación se tuvo un diseño de Estudio de Caso con cuatro estudiantes con desempeños académicos diferentes, conformado por tres niñas y un niño. Para la presentación de este trabajo, los nombres reales de los estudiantes se cambiaron por los nombres: Fuego, Agua, Aire y Tierra. El estudiante Fuego se nombró así porque al comienzo de intervención en el aula se mostró muy tímido, pero cuando tuvo confianza en su propio trabajo fue luz para sus compañeros haciendo aportes y realizando explicaciones; los estudiantes Aire y Agua se nombraron así porque tuvieron un trabajo de clase constante, sin embargo, no demostraron confianza en los diseños de triángulos que hacían y explicaciones que expresaban, cambiando fácilmente de parecer por los comentarios de otros compañeros les hacían; y el estudiante Tierra se nombró así porque desde el comienzo de la intervención en el aula se mostró firme frente a los conocimientos que expresó y los diseños de triángulos que realizó.

Se diseñó una unidad didáctica basada en las fases orientadoras para el aprendizaje del Modelo de Van Hiele, la cual se desarrolló con todo el grupo de estudiantes. Sin embargo, el trabajo que se analizó juiciosamente y exhaustivamente fue el de los niños que hicieron parte de la investigación. Para la escogencia de los estudiantes, se tuvieron en cuenta los desempeños académicos, el género, su disponibilidad y la autorización de los padres de familia y de la Institución Educativa (ver anexo 3).

Las técnicas de recolección de datos que se utilizaron en el desarrollo de la investigación, fueron:

- Observación participante: esa técnica permitió tener un contacto más cercano con los estudiantes en el desarrollo de la unidad didáctica. Durante el periodo de la aplicación de la unidad didáctica, la investigadora hizo la introducción al trabajo que se iba a realizar a la vez que respondía las inquietudes que suscitaba el mismo.

- Desarrollo de la unidad didáctica: este instrumento fue el que se les presento a los estudiantes para trabajar en las diferentes clases y posteriormente servir de insumo para el análisis de datos.
- Entrevistas: estas fueron estructuradas y se realizaron entrevistas a la docente Beatriz Pino (ver anexo 8) y a cada uno de los estudiantes que participó de la investigación (ver anexos 9, 10, 11, 12 y 13).
- Videos: se realizaron filmaciones de todas las sesiones de trabajo. Es de aclarar que desde antes de comenzar con el desarrollo de la unidad didáctica, se realizaron filmaciones con el fin de adaptar a los estudiantes a la cámara de filmación. Estos videos permitieron hacer un análisis detallado de las expresiones y diseños de los estudiantes para la caracterización del proceso cognitivo de construcción geométrica.
- Fotografías: se tomaron fotografías de los trabajos de los estudiantes, a sus cuadernos y guías; lo cual se llevó a cabo durante y después de realizar los diseños de triángulos.

6.2. Etapas de la investigación

Etapa de adaptación: fue el periodo en el que la investigadora se involucró en las actividades escolares y de clase del grupo de quinto, al igual que el personal que realizaba los videos y las fotografías. Durante esta etapa se retomó con los estudiantes el reconocimiento de los polígonos según sus lados, los ángulos y su tipología.

Adaptación de la unidad didáctica: para esta etapa se tuvo en cuenta los saberes que los estudiantes mostraron y expresaron en la etapa de adaptación. La unidad didáctica se diseñó teniendo como referente las propuestas del trabajo de Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009) y las fases de aprendizaje del Modelo de Van Hiele (ver anexos 4, 5, 6, y 7); posteriormente fue validada antes de su aplicación

por el asesor de la investigación. Esto permitió que los estudiantes se motivaran y pudieran realizar el diseño de triángulos.

La implementación de la unidad didáctica, tuvo los siguientes momentos:

- I. **ARMEMOS:** la etapa de adaptación y este momento de la unidad, hacen relación a la primera fase del modelo de Van Hiele: información. En este, se hizo una introducción de los triángulos así como de los elementos que se iban a abordar: vértice, lado y ángulo. En este momento también se dio oportunidad para que los estudiantes interpretaran cual debía ser la relación entre la longitud de los lados de un triángulo, para que se pudiera diseñar; haciendo uso de pitillos cortados en diferentes longitudes. Al finalizar este momento, los estudiantes debieron comunicar sus conclusiones a los compañeros de grupo.
- II. **MIDAMOS:** este momento de la unidad hace referencia a la segunda fase del modelo de Van Hiele: orientación dirigida. Se le entregó a los estudiantes triángulos diferentes de madera para que en pareja realizarán mediciones de los lados y de los ángulos de cada uno, con la ayuda de los instrumentos de medida. A partir de esta actividad debían completar algunas instrucciones que permitieran develar las conclusiones a las que habían llegado manipulando el material concreto. Al finalizar este momento y después de haber hecho la búsqueda de unas palabras en una sopa de letras, los estudiantes participaron para encontrar la relación que había entre los nombres buscados y las características que habían observado en los triángulos de madera.
- III. **DISEÑEMOS TRIÁNGULOS:** este momento de la unidad está relacionado con las fases 3 y 4 del modelo de Van Hiele: explicación y orientación libre. En este, las ideas y experiencias que los estudiantes tuvieron en los otros dos momentos, fueron la base para que la docente-investigadora guiará

algunas maneras de diseñar triángulos. Esto permitió que los estudiantes se enfrentarán a instrucciones específicas y también a instrucciones abiertas para el diseño de triángulos.

- IV. DISEÑANDO TESELACIONES: este momento está relacionado con la fase 5 del modelo de Van Hiele: integración. En este, se pretendió que a partir del diseño de triángulos aprendido en los momentos anteriores, los estudiantes diseñaran teselaciones y las colorearán, teniendo en cuenta las características de cada uno.
- V. EXPOSICIÓN DE TESELACIONES: en este momento los estudiantes compartieron las teselaciones diseñadas con sus compañeros mostrándolas y explicaron el uso de los colores de acuerdo a las características de los triángulos.

Implementación: la implementación de la unidad didáctica se realizó en la IEPLV con los 32 estudiantes de grupo 5º1¹². Esta se hizo con el apoyo de la docente encargada de área de matemáticas Beatriz Pino, durante el mes de mayo de 2014. Para la implementación se utilizaron los siguientes instrumentos: reglas, compás, transportadores, pitillos, tijeras, pega, triángulos de madera y colores.

Los tiempos requeridos para la implementación, se distribuyeron así:

- Etapa de adaptación: 3 clases.
- Armemos: 1 clase
- Midamos: 2 clases
- Diseñemos triángulos: 3 clases
- Diseñemos teselaciones: 1 clase
- Exposición de teselaciones: 1 clase

¹² Todo el material audio-visual y fotográfico está como anexo en una memoria USB.

Análisis de datos: para hacer el análisis de los datos se retomaron las entrevistas, el desarrollo de la unidad didáctica, los videos y las fotografías captados durante las clases; y se extrajeron las unidades de análisis. Luego, estas unidades se analizaron entre sí para agruparlas en categorías y posteriormente compararlas con el marco teórico, teniendo como resultado la caracterización del proceso de construcción geométrica.

Conclusiones: estas fueron el resultado de la relación entre el proceso de construcción geométrica, el estado del arte y los objetivos de la investigación.

6.3. Población y muestra

El trabajo investigativo se realizó con los estudiantes del grupo 5^o1 de la Institución Educativa Pedro Luis Villa (IEPLV) ubicado en carrera 43 N° 66C- 40 entre los barrios Villa Hermosa y Manrique central del municipio de Medellín, Antioquia.

La institución fue fundada en 1963, es de carácter oficial y de calendario A. Cuenta con espacios como: cancha, salones, coliseo, ludoteca, biblioteca, zona verde del jardín, tienda escolar, tres pisos, cocina para los docentes, baños, oficinas de la Rectora y el coordinador. El modelo pedagógico de la institución es desarrollista-socialista, por lo que su objetivo está enfocado en ayudar a los estudiantes a acceder progresivamente al conocimiento, de manera que puedan responder a sus necesidades y condiciones sociales y culturales. Sin embargo, aún faltan parámetros y procesos metodológicos claros para trabajar con este modelo desde cada una de las asignaturas.

Los estudiantes que componen la institución son de estrato socio-económico entre 1 y 3. Los estudiantes de la jornada de la mañana en su mayoría viven en Manrique central, sin embargo, la institución cuenta con transporte para los que viven en el barrio de La Cruz, La Onda y Versailles. Los estudiantes de la jornada

de la tarde, en su mayoría, viven en La Onda y La Cruz, por lo que la institución también les ofrece el servicio de transporte escolar.

Los padres de familia en su mayoría no tienen formación profesional y se emplean en oficios varios, también como vendedores ambulantes, constructores o albañiles. Las madres de familia, en su mayoría, son amas de casa o trabajan de internas en casas como domésticas. Esta situación genera que, frecuentemente, los estudiantes cuando llegan a sus casas tengan poco acompañamiento para tareas escolares y preparación de evaluaciones.

En su mayoría, los estudiantes de quinto grado no realizan actividades extra-escolares y organizan solos su tiempo libre por las largas jornadas de trabajo de sus padres.

Son estudiantes participativos, alegres y cariñosos. Sin embargo requieren de constante repetición de los conceptos durante las clases y poco ejercitan en casa, lo que incide en su desempeño académico. Son pocos los estudiantes que reprobaban el grado de escolaridad. Los estudiantes en esta situación, llevan más de dos años escolares en quinto grado de educación básica y son repitentes de la IEPLV o de instituciones educativas diferentes.

La matemática es asumida por los estudiantes como un área con un alto grado de complejidad pero que es aplicativa y asequible. Sin embargo, guardan algo de recelo y pereza por la signatura de aritmética, dado que en años anteriores les han exigido la memorización de las tablas de multiplicar y otras propiedades sin profundizar en las mismas. Para el año 2014, la clase de matemáticas es dinámica, activa y con ejercitación constante tanto de manera personal, en equipos y de salir al tablero. Son clases guiadas a través del libro de texto escolar "Matemáticas 5º" (Proyecto del Ministerio de Educación), en la que los adelantos conceptuales son pocos por la constante repetición de definiciones que debe hacer la docente.

La geometría siempre la han abordado desde algunas clases de matemáticas. Durante el año 2014 los conceptos de geometría los retomarían en el segundo semestre del año escolar. Sin embargo, la apertura que la docente y los estudiantes tuvieron para trabajar geometría en el primer semestre, permitió evidenciar un avance en campo. En otros años escolares, las clases de geometría se han enfocado en la manipulación de material concreto, sobre todo del origami. Este acercamiento a la geometría desde el material concreto, ha permitido que los estudiantes muestren agrado por la asignatura. Desde la observación y experimentación que han tenido en geometría, son estudiantes que logran analizar las partes y propiedades particulares de polígonos, sin explicar las relaciones que hay entre las mismas, lo que les permite ser ubicados en el nivel de Análisis del Modelo de Van Hiele.

El siguiente esquema muestra la ruta metodológica que se siguió para la investigación:

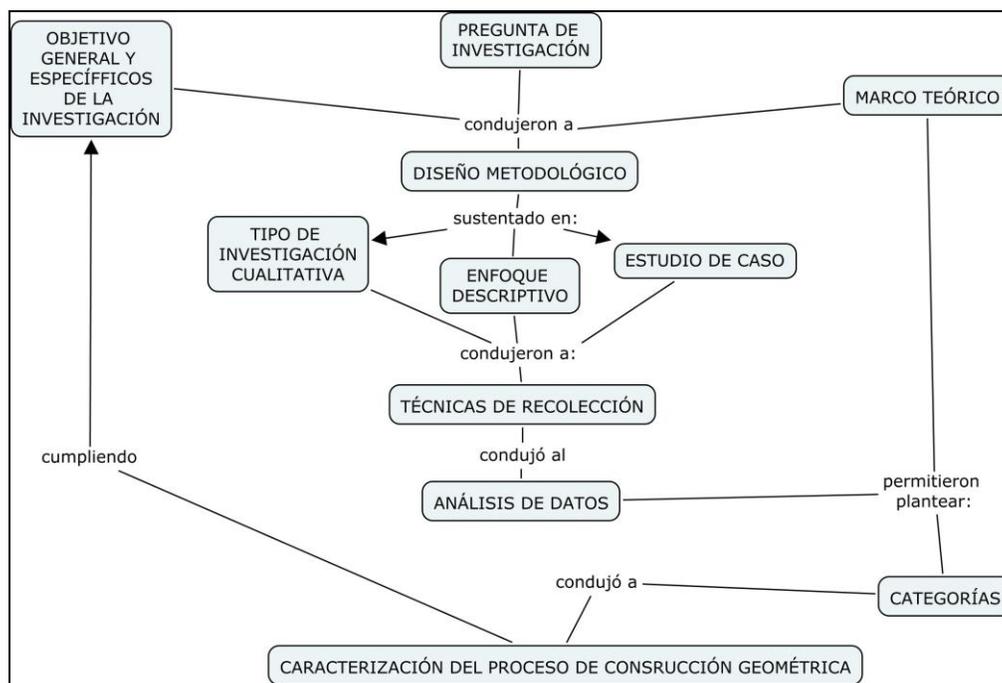


Ilustración 3: Ruta metodológica

7. Caracterización del proceso de construcción geométrica

El análisis de datos para la caracterización del proceso de construcción geométrica implica hacer algunas precisiones frente a los términos que se van a utilizar y adaptaciones a partir de los conceptos expuestos en el marco teórico.

Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) cuando se expresan sobre las representaciones externas no hablan de dibujo sino de construcción geométrica. Sin embargo, para el desarrollo de esta investigación se mencionará diseño geométrico, en este caso de diseño de triángulos, para no confundirlo con el proceso que se quiere caracterizar. Esta nomenclatura se propone porque se toma el diseño del triángulo como la representación externa producto del proceso de Construcción Geométrica.

Así como se mencionó en el marco teórico, la regla, el compás y el transportador serán llamados instrumentos. No con la idea de apartar el sentido que han expresado Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) sobre el concepto de artefacto. Se nombrarán instrumentos para hacer uso de un lenguaje más común para los estudiantes, pero con la idea que ellos cumplen la doble función (personal y desarrollo de la matemática) que las autoras resaltan de los artefactos.

Otra precisión que se hará con respecto al marco teórico, está relacionada con las imágenes mentales y habilidades para la visualización. Si bien Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) proponen un ciclo didáctico donde los artefactos, en este caso los instrumentos, cumplen su doble función, ni ellas ni tampoco otros autores, hacen explícitas las imágenes mentales y las habilidades involucradas en el proceso de construcción geométrica. Por esta razón, se advierte que se hizo una adaptación de las imágenes mentales y habilidades propias del proceso de visualización propuestas por Presmeg (1986) citado por Gualdrón (2011) y Gutiérrez (2011). Esta adaptación presenta las siguientes apuestas:

- Las imágenes mentales que pueden intervenir en el proceso de Construcción Geométrica, son:
 - Imágenes concretas (IC): éstas hacen referencia a imágenes específicas y de características particulares. Por lo tanto se pueden considerar en el proceso de Construcción Geométrica como claves en la identificación que los estudiantes deben hacer de características específicas que estén expresadas en las instrucciones. Luego de terminado el diseño, estas imágenes las podrán volver a identificar en su diseño y verificar si corresponde a la instrucción o no.
 - Imágenes patrón (IP): éstas son las que no se fijan en lo particular y concreto de los objetos sino en sus relaciones. Por lo tanto se pueden considerar en el proceso de Construcción Geométrica importantes para el momento en que los estudiantes articulan las características específicas, de una instrucción, para realizar un diseño. Así mismo, esta articulación permitirá que los estudiantes puedan nombrar el triángulo diseñado de acuerdo a sus características.
 - Imágenes desde la memoria (IM): Presmeg (1986) citado por Gualdrón (2011) y Gutiérrez (2011), describe estas como imágenes memoria de fórmulas, pero se cambió para hacer alusión no sólo a las formulas, sino también a los procedimientos para el diseño. Por lo tanto se puede considerar en el proceso de Construcción Geométrica que éstas están vinculadas con la memorización de los procedimientos para el uso de los instrumentos de medida y del diseño de triángulos.
 - Imágenes dinámicas (ID): son las que están vinculadas con la habilidad de mover y transformar imágenes concretas. Por lo tanto se puede considerar en el proceso de Construcción Geométrica son

las imágenes que posibilitan que un estudiante reconozca un diseño en diferentes posiciones y diversas maneras de llegar a él.

- Las habilidades para el diseño que posibilitan el proceso de construcción geométrica, son:
 - Coordinación motriz fina en el trazado (H1): esta habilidad está relacionada con la coordinación visuo-manual y motricidad gestual de la mano necesarias para el manejo adecuado de los instrumentos de medida. De esta forma, el estudiante muestra la capacidad para hacer movimientos con la mano y tener dominio de cada uno de los elementos de la misma.
 - Reconocimiento de posiciones en el espacio (H2): es necesaria porque debe desarrollarse la habilidad donde las representaciones de figuras geométricas pueden tener diferentes caminos para su diseño, y aunque no se siga una secuencia de pasos definida por el docente o por el libro, la representación externa sigue siendo la misma.
 - Discriminación discursiva del diseño (H3): está relacionada con las semejanzas y diferencias (confrontación) de las instrucciones con las representaciones externas diseñadas por el estudiante.
 - Memoria de procedimientos para el diseño (H4): esta habilidad está relacionada con la interiorización que los estudiantes hayan hecho del manejo de los instrumentos de medida y recordar cómo utilizarlos para el diseño de representaciones externas.

7.1. Análisis de datos

Para este apartado se presentarán las unidades de análisis que se observaron y que fueron recurrentes en el desarrollo de la unidad didáctica. Es importante

especificar que a cada uno de los momentos de la unidad didáctica, se le nombrará con una letra y un número, las cuales son:

M1= ARMEMOS

M2= MIDAMOS

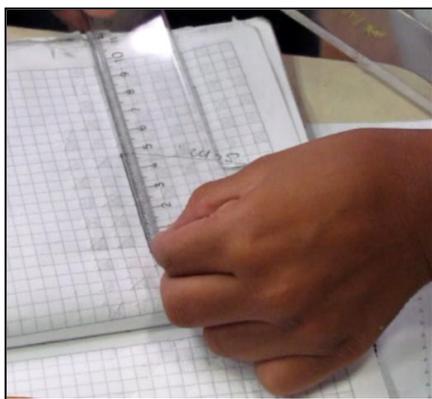
M3= DISEÑEMOS TRIÁNGULOS

M4=DISEÑANDO TESELACIONES

M5= EXPOSICIÓN DE TESELACIONES

Unidad de análisis 1: del significado conceptual al sentido construido de las medidas, a partir del manejo de los instrumentos.

En M1, los estudiantes debían recortar pitillos para armar triángulos. Esto permitió observar que de los pitillos más grandes podían obtener más de un pitillo pequeño con la medida que indicaba la instrucción. Inicialmente expresaron que no alcanzaban a hacer todos los recortes necesarios con la cantidad de pitillos entregados. Luego, haciendo uso de la regla, empezaron a hacer mediciones y relacionar las medidas de los pitillos grandes con los pequeños, no



solo por su tamaño tangible sino también por las medidas que estos tenían. Así, las medidas pedidas en la instrucción adquieren un sentido desde el recortar y medir con el instrumento y no se asumen como simples datos para operar.

En M2 y M3, se evidenciaron situaciones en las que algunos estudiantes tenían dificultades al

completar la tabla del numeral 2 (ver anexo 1) o hacer el diseño de un triángulo en el tablero, respectivamente. Cuando escribían la longitud de los lados, lo hacían con precisión, expresándola en cm y mm y al escribir la amplitud de los ángulos, por ejemplo, el estudiante Aire expresa que “el ángulo mide 80° y 7mm”, por lo que su compañero, el estudiante Tierra, le dice que “el ángulo no mide eso... en realidad el ángulo mide 87° , los mm son con la regla y estamos midiendo un ángulo con grados” (Trabajo en clase, Mayo 9 de 2014). Esto permitió observar que el estudiante Tierra, en el contacto con los instrumentos, lo articuló con las unidades de medida y con el concepto de ángulo.

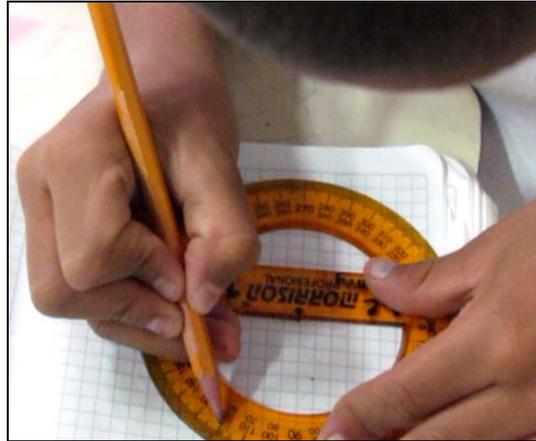
En M1 y M2 se hizo evidente la confusión que algunos estudiantes mostraban al comenzar a medir con la regla. Esta se observó cuando empezaban a hacer el conteo en el instrumento desde 1 cm y no desde 0 cm, asumiendo que el cm entre estos dos era despreciable. Al momento de hacer comparaciones con las longitudes trazadas por otros compañeros, evidenciaron la diferencia y acordaron el procedimiento para comenzar el conteo cuando se trazan longitudes. Esta aclaración con la regla, permitió que al momento de hacer conteos con el transportador lo hicieran de una forma correcta.

Comunicación

El proceso comunicativo fue evidenciado a lo largo de toda la unidad didáctica en la medida que los estudiantes expresaban sus inquietudes o conclusiones a la docente-investigadora, frente a todos sus compañeros o con las parejas de trabajo. Fue percibido con facilidad como al comienzo de la unidad, los estudiantes usaban un lenguaje natural al comunicar sus ideas; y al finalizar la unidad, hicieron uso de un lenguaje más estructurado frente al diseño de triángulos. Por ejemplo, el estudiante Agua (Trabajo en clase, Mayo 8 de 2014) cuando estaba diseñando un triángulo con regla y compás, comunicaba el procedimiento y explicaba cómo los instrumentos se articulaban para este fin. Hubo otros momentos en los que los estudiantes se expresaban frente algún diseño y sus mismos compañeros hacían las correcciones en lenguaje geométrico apropiado.

Lateralidad

La lateralidad fue observable por la tendencia que los estudiantes mostraron para hacer el conteo por la derecha, en el transportador. Igualmente por la incidencia que tuvo la ubicación de los diseños de los estudiantes en sus cuadernos. Hubo tres tipos de eventos que se presentaron con los estudiantes, los cuales son:



- Cuando algún estudiante realizaba el conteo en el transportador comenzado desde el 0° de la izquierda y sus compañeros manifestaban que no era correcto. Posteriormente cuando verificaban los resultados coincidían que este no era un factor que alterara la respuesta.
- Cuando algún estudiante hacía el conteo en el transportador por la izquierda, sin tener en cuenta que uno de los lados que comprende el ángulo coincidiera con el 0° del instrumento. Esto generaba que en la verificación con sus compañeros, sus respuestas o las representaciones externas, fueran diferentes y tuvieran que retroceder en el diseño.
- La dificultad que algunos estudiantes tenían frente a la posición en la que ubicaban los triángulos de madera en el M2 y los diseños que realizaban en M3. Estas situaciones provocaban confusión por la afinidad que tienen para ubicar un objeto en una posición específica o porque la ejercitación de los mismos en otras posiciones ha sido poca.

Motricidad

La motricidad fue un factor que incidió en los diseños que hacían los estudiantes. Aunque en todos los momentos de la unidad didáctica se reflejó la influencia de la motricidad en las actividades, los aspectos y eventos más relevantes fueron:

- El reconocimiento visuo-manual que los estudiantes, inicialmente, hicieron de los instrumentos de medida y de las partes que los componen; para posteriormente relacionar estas partes con las funciones que cumplen dentro del diseño de un triángulo.
- En el M1, la motricidad fue fundamental en el manejo de la regla para la medición, de las tijeras para recortar los pitillos y en la manipulación que debían hacer al momento de pegar los pitillos que ya tenían pega. Fueron notorias las destrezas y dificultades de algunos estudiantes permitiendo cumplir o no la instrucción.
- En el M2, la manipulación de los triángulos de madera generó un ambiente agradable y de motivación en los estudiantes, por la posibilidad de interactuar con representaciones diferentes a las pictóricas. Fue observable el reconocimiento visuo-manual que los estudiantes hacían de cada uno de los elementos de los triángulos, como: los lados, ángulos y vértices.
- En el M3, el manejo del espacio fue un factor que exigió de los estudiantes repetir diseños. Esta situación se presentó porque algunos comenzaban con el diseño en la margen de la hoja y mientras iban avanzando, observaban que el diseño no se podía concluir. Estos retrocesos permitieron que descubrieran que antes de hacer un diseño, debían analizar las dimensiones que les estaban expresando en la instrucción.



Verificación

La verificación que fue observable durante el desarrollo de la unidad didáctica, se reflejó en la medida que los estudiantes, por ejemplo, en el M1, manipulaban varios pitillos con diferentes medidas y afirmaban si quedaban bien o mal cortados. Igualmente se reflejó en la medida que los estudiantes al finalizar un diseño, retomaban la instrucción y confrontaban ambos (diseño e instrucción), para validar el trabajo. También cuando, en el proceso comunicativo, exponían sus ideas a los compañeros del grupo.

En todos los casos mencionados la observación realizada no fue suficiente para la verificación, por lo que el manejo de los instrumentos de medida fue retomada constantemente.

Procedimiento e interpretación del diseño

Esta unidad de análisis se reflejó con una mayor fuerza en los M3 y M4 de la unidad didáctica, donde los estudiantes retomaban constantemente la manera de hacer diseños de triángulos, las comunicaban a sus compañeros y las reproducían.

7.2. Categorías

Las unidades de análisis, en su mayoría, se retomaron para agruparlas y formar tres categorías que simbolizan un antes, un durante y un después del diseño de triángulos. Estas son:

Motricidad

Andanaz (2009) menciona dentro de la psicomotricidad fina la motricidad gestual de la mano y la coordinación visomanual; por su lado, Ochoa (2007) menciona dentro de la motricidad fina la motricidad gestual, la coordinación manual y la

coordinación visuomanual¹³. Lo expresado por ambas está relacionado con la habilidad de la coordinación motriz fina en el diseño describiendo las condiciones necesarias para movimientos precisos, ordenados y coordinados de la mano y a la vez articulados con la visión. Por lo tanto, es necesario desarrollar en los estudiantes la capacidad para hacer ejercicios manuales de acuerdo con lo que han visto. En el caso del proceso de construcción geométrica, la capacidad para realizar diseño de polígonos u otro tipo de representaciones, con el sentido estructurado alrededor del manejo de los instrumentos de medida.

En esta categoría fue observable la relación entre la lateralidad y las imágenes concretas e imágenes dinámicas. Hay que tener en cuenta que la lateralidad no sólo se refiere al dominio e identificación de la derecha e izquierda, también incluye las relaciones de objetos y de la misma persona con respecto a un punto de referencia. En los estudiantes fueron observables diferentes situaciones donde esta relación permitía o no la realización de una actividad. Estas son:

- La posición del transportador para medir o diseñar ángulos:
Cuando los estudiantes están teniendo sus primeros contactos con los ángulos y su clasificación, frecuentemente se los presentan en la misma posición (con el vértice en la izquierda, uno de sus lados en posición horizontal y trazado en sentido anti-horario). Por ejemplo, en el M3, para hacer el diseño 5 (ver anexo 1), se evidenció la dificultad que los estudiantes mostraron al tratar de trazar el segundo ángulo. El primer ángulo lo trazaron de una manera rápida y sin problemas, pero al momento de trazar el segundo ángulo fue más dificultoso para los estudiantes, identificar donde ubicar el centro del transportador y el punto de inicio para hacer el conteo de los grados.

¹³ Reconociendo que Andanaz (2009) hace referencia a la coordinación visomanual y Ochoa (2007) a la coordinación visuomanual, significando lo mismo, en esta investigación se retomara para la categoría de Motricidad la coordinación visomanual.

En este caso el reconocimiento de las imágenes concretas (ángulo) es clara, al igual que el instrumento que la posibilita, sin embargo el predominio de la posición y del trazado de ángulos, dificultó el reconocimiento visomanual y la manera de articular los movimientos manuales en pro del trazado.

- La “diferencia” de un mismo diseño en varios estudiantes:

En el desarrollo de la unidad didáctica, en especial del M3, se pudo observar que los estudiantes mostraban inquietud frente a cuál de los diseños de triángulos era el correcto, comparando el suyo con el de algún compañero. Por ejemplo, en la instrucción 2 (ver anexo 1) los estudiantes reconocían: las imágenes concretas (ángulo de 70° y lados de 5cm y 13cm, respectivamente), escogían como base del triángulo el lado de 13cm o el lado de 5cm; y hacían la relación de las imágenes concretas con la coordinación visomanual, para realizar el diseño escogiendo los instrumentos adecuados. Dependiendo de cuál de los dos lados escogieran como base del triángulo, éste estaría en una posición diferente; sin embargo esto no significaba que fueran distintos. Para algunos estudiantes era inquietante que los triángulos no se vieran iguales, pues aunque las imágenes concretas enunciaban que sí lo eran, el observar el diseño como un todo estático no permitía hacer la deducción. Igualmente, expresaban que el lado de mayor longitud debía ser la base del triángulo. Este es otro ejemplo de cómo la lateralidad en los triángulos, mostrándolos frecuentemente en una misma posición, dificulta que las imágenes dinámicas surjan para movilizar las imágenes concretas.

- Manejo del espacio:

Otro aspecto para resaltar dentro de esta categoría es el manejo del espacio, el cual está contemplado dentro del esquema corporal [Ochoa (2007)]. En los M1 y M3 se observó como los primeros triángulos que los estudiantes armaban o diseñaban, respectivamente, eran ubicados en la margen de la hoja. Esta ubicación impedía, a veces, que la actividad con la representación se cumpliera, dado que inicialmente no se analizaba el espacio que se requeriría para hacerla. Posteriormente, la relación entre las imágenes concretas y el espacio dispuesto en la hoja, se convirtió en un factor relevante a tener en cuenta para no tener que hacer rediseños. Esta situación permitió avances en la coordinación visomanual, no porque se les haya dicho cual era el espacio que necesitaban para cada representación, sino por las experiencias que ellos mismos habían observado.



A partir de los anteriores análisis, es posible expresar que esta categoría permite crear un vínculo motivacional entre las instrucciones y el diseño de triángulos. No sólo implica un adiestramiento de la mano, sino también conexiones con lo visomanual, las imágenes concretas e imágenes dinámicas. Esto posibilitará satisfacción de los estudiantes ante una actividad o frustración por no lograr conectar todos los componentes necesarios para la misma.

Interpretación de las instrucciones durante el diseño de triángulos

Teniendo la Motricidad como el proceso anterior a cualquier diseño, en la categoría de interpretación de las instrucciones, se describirá la relación entre las habilidades de la coordinación motriz fina del trazado (H1) y la memoria de procedimientos para el diseño (H4) con las imágenes concretas (IC), imágenes

dinámicas (ID), imágenes patrón (IP) e imágenes desde la memoria (IM) durante el diseño de triángulos.



En el apartado de “Población y muestra” ubicado en el capítulo de Metodología, se mencionó que los estudiantes están en el nivel de razonamiento de Análisis según el Modelo de Van Hiele. A partir de este nivel, los estudiantes comienzan a hacer la caracterización de los triángulos y sus partes apoyado de las IC y su relación con los instrumentos de medida.

La H1 está relacionada con las IC e ID. Esta relación se refleja en la medida que las IC hacen referencia a características concretas y específicas que tienen los triángulos, y con las IP al momento de vinculadas con el instrumento de medida que les puede ayudar a diseñarla. Con relación a las ID, los estudiantes van reconociendo que hay diferentes formas de diseñar un triángulo y que seguirá siendo el mismo mientras conserve las características, sin importar la posición en que se encuentre.

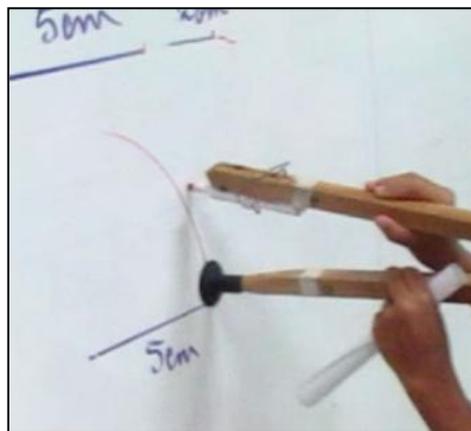
Inicialmente, la relación entre H1 con IC e ID se observó en el M1, como se expresó en una de las unidades de análisis, donde los estudiantes hacían la identificación de las IC (pítillos, longitudes específicas); y en la interacción de ellos con la regla y el material propuesto,

Los estudiantes reconocían el vínculo de la unidad de medida expresada en centímetros con el pitillo recortado y las dimensiones en que quedaba. Así mismo, hubo otras intervenciones de los estudiantes en los M2 y M3, donde vinculaban la coordinación visomanual, la H1 y las IC. Por ejemplo, al reconocer que las unidades mencionadas en la instrucción eran grados, identificaban que el instrumento adecuado era el transportador, y hacían uso de este y de la regla, para realizar el diseño.

Las relaciones entre las habilidades para el diseño y las imágenes mentales, también se observaron en los estudiantes: Aire, Fuego, Agua y Tierra, en la medida que leían las instrucciones, identificaban el elemento del triángulo al que estaban haciendo referencia, el instrumento que debían usar y lo diseñaban teniendo en cuenta los acuerdos de diseño que se habían construido en el grupo. Por ejemplo, el estudiante Fuego en el M3 salió al tablero para diseñar el triángulo 6 (ver anexo 1). En esta demostración, el estudiante primero trazó con la regla los segmentos indicados en la instrucción: 5cm, 7cm y 4cm; luego expresó en voz alta “voy a usar el compás y lo abro así” (lo abre con base en la longitud del segmento de 7cm; ubicó la punta del compás en uno de los extremos del segmento de 5cm e hizo un arco sin cambiar la abertura del compás); después expresó “y luego lo abro con la otra” (hizo el mismo procedimiento de antes pero esta vez dudó en donde debía poner la punta del compás, pensó un momento, y observó que para obtener la intersección de los arcos debía poner la punta en el extremo opuesto del paso anterior, lo hizo así y trazó el arco), finalmente expresó oralmente “voy a unir el punto (el punto de intersección de los arcos) con las puntas de esta línea (los extremos del segmento de 5cm) y ya” (Trabajo en clase, Mayo 9 de 2014).

La situación anterior se pueden observar cómo las IC (los segmentos con longitudes específicas, arcos, triángulo) se articulan con la H1, haciendo un reconocimiento de los instrumentos que permitían el diseño y, al mismo tiempo, muestra la relación entre la H4 y las IM, evocando las experiencias aprendidas en las clases anteriores y retomando el procedimiento manual que permitía el diseño.

Durante el diseño de los triángulos también fue observable el vínculo entre la instrucción y el manejo del espacio. Así como se mencionó en la categoría de la motricidad, algunos los estudiantes, inicialmente, tuvieron que rediseñar triángulos por no relacionar estos



dos aspectos. Esto generó que, posteriormente, los estudiantes al momento de diseñar un triángulo, analizaran el espacio que requerían de acuerdo con las IC, e hicieran uso de la ID en la medida que podían ubicar las IC de formas diferentes para que el espacio fuera suficiente.

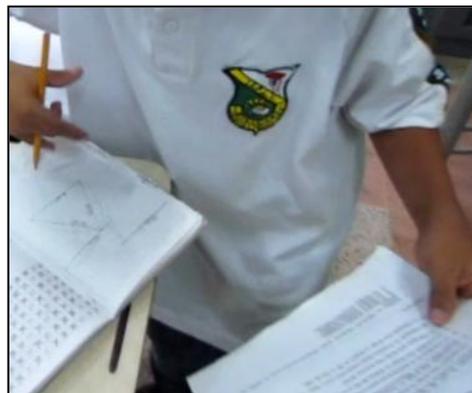
Verificación desde el proceso discursivo de configuración

En esta categoría se retomarán dos aspectos del marco teórico: el Proceso Discursivo de Configuración y la Comunicación.

Retomando a Torregrosa y Quesada (2007), el proceso discursivo de configuración implica la coordinación entre la aprehensión discursiva y la aprehensión operativa. Este proceso es un punto de encuentro entre la visualización, el razonamiento y la construcción geométrica, dado que involucra la instrucción, la operatividad y el diseño terminado.

Como se expresó en el apartado de comunicación, con base en Tamayo (2009) y Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009), el proceso comunicativo es considerado aquí, no asumido como aquel en el que el docente es el poseedor del conocimiento y el estudiante capta este conocimiento sin esfuerzo y rápidamente; sino como el proceso cognitivo que implica que el docente debe codificar el mensaje, el estudiante lo decodifica resignificándolo, impregnándolo de sentido y aprendiéndolo, permitiendo ser un recurso cognitivo para la decodificación de un nuevo mensaje.

En el diseño de triángulos, el proceso comunicativo cobra gran sentido en el momento de la verificación. Esta verificación va más allá de expresar si el diseño es correcto o no. La verificación se reflejó en cuatro eventos que siguen a continuación:



- ✓ Cuando el estudiante decodificó el mensaje de la instrucción para hacer el diseño.

Este momento ya fue abordado en la categoría anterior. Sin embargo cabe resaltar la relación que tiene con el cambio de anclaje de lo discursivo a lo visual. Hay que aclarar que esta relación es con la imagen que el estudiante tiene del diseño terminado, pues, como ya se expresó, el proceso de decodificación del mensaje que está en la instrucción, implica varios aspectos (las relaciones entre las H1 y H4 con IC e IM).

- ✓ Cuando el estudiante relacionó el diseño que realizó, con la decodificación del mensaje expresado en la instrucción.

Este momento estará relacionado con la H3 y con el proceso discursivo de configuración, especialmente en el cambio de anclaje de lo visual a lo discursivo.

En la H3 se evocaron las ID en la medida que los estudiantes reconocieron que las IC no deben ser estáticas y que, aunque no se diseñen en el mismo orden, estas imágenes serán las mismas, mientras el diseño cumpla con las condiciones de la instrucción.

Desde el proceso discursivo de configuración, el estudiante podrá evaluar si llegó a un diseño válido cumpliendo satisfactoriamente con la instrucción, o por el contrario, terminó el diseño y éste no cumplió las condiciones iniciales o no lo terminó y llegó a un punto en el que no supo qué camino seguir. Este proceso se evidenció con algunos estudiantes cuando al terminar el diseño, se les pedía que lo confrontaran con la instrucción, y al extraer las IC con las que habían trabajado, notaban que aunque habían terminado un diseño, este no correspondía con la instrucción dada y por lo tanto debían hacer un rediseño.

- ✓ Cuando, por medio de la palabra y el lenguaje, el estudiante codifica un mensaje (el procedimiento que realizó en el diseño de un triángulo) para que sus compañeros lo decodifiquen. También el caso contrario, cuando el

estudiante decodifica el mensaje que sus compañeros le expresan sobre un diseño.

Este momento se evidenció en distintas partes en el desarrollo de la unidad didáctica. A su vez, este momento implica que si el estudiante codifica un mensaje para sus compañeros, es porque él ya decodificó el mensaje anterior y para él tiene sentido el contenido conceptual que se quiere expresar. En esta codificación y decodificación que el estudiante hace se involucra la H2 por el reconocimiento de otras formas de hacer los diseños, conservando las IC expresadas en la instrucción. También fueron observables las IP al comunicar los nombres de los triángulos, según sus lados y sus ángulos, donde los estudiantes ya analizaban las IC del diseño y también las relaciones entre las mismas. Dos ejemplos de esto se presentan a continuación: a) en el M3, la docente-investigadora preguntó por el nombre del diseño 4 según los lados (ver anexo 1) y el estudiante Agua expresó “no tiene todos los lados iguales porque sus lados miden 5, 5 y 6 entonces se llama isósceles” (Trabajo en clase, mayo 9 de 2014), b) en el M3, la docente-investigadora preguntó por el nombre del diseño 1 (ver anexo 1) y el estudiante Tierra expresó: “como tiene un ángulo de 110° , se llama obtusángulo y el otro nombre, como tiene dos lados iguales, isósceles” (Trabajo en clase, mayo 8 de 2014).

Este evento también se observó cuando los estudiantes comentaban lo expresado por sus compañeros, diciendo si era correcto o no y dando otro tipo de argumentos y respuestas. Por ejemplo, en varios momentos de



la unidad didáctica, la docente-investigadora realizaba preguntas al grupo desde las que algunos estudiantes expresaban sus respuestas y otros las refutaban.

La siguiente tabla describe el cumplimiento (C) o el cumplimiento con dificultad (CD) de cada estudiante en las habilidades e imágenes de las categorías:

Categorías Estudiantes	Motricidad			Interpretación de las instrucciones durante el diseño de triángulos						Verificación por aprehensión discursiva			
	H1	IC	ID	H1	H4	IM	IC	IP	ID	H2	H3	ID	IC
Fuego 	CD	C	C	C	CD	C	C	C	C	CD	C	C	C
Tierra 	C	C	C	C	C	CD	C	C	C	CD	C	C	C
Aire 	CD	CD	CD	C	CD	CD	C	CD	CD	CD	C	C	C
Agua 	CD	C	CD	C	C	C	C	C	CD	CD	C	C	C

Ilustración 4: Tabla descriptiva de los estudiantes

A partir de la tabla de la ilustración 4, es importante resaltar que los estudiantes tuvieron dificultad con la habilidad para reconocer posiciones en el espacio y en algunos momentos con las imágenes dinámicas. Esto se puede deber, muy probablemente, a la familiarización que los estudiantes tienen con los triángulos en una sola posición, generando que entren fácilmente en conflicto para hacer reconocimientos y diseños en posiciones diferentes. Al comienzo de la unidad didáctica mostraron dificultad en la habilidad para la coordinación motriz fina en el trazado, sin embargo mientras tenían más contacto con los instrumentos de medida y las instrucciones, fueron mostrando más destreza. También, se debe resaltar que los estudiantes tuvieron fortalezas al momento de identificar las imágenes concretas en la lectura de las instrucciones, durante el diseño del triángulo y en el momento de hacer la verificación del mismo. Esto permitió que a

lo largo de la unidad didáctica las imágenes concretas posibilitaran el acceso a otro tipo de imágenes mentales.

Específicamente, el estudiante Fuego, al comienzo del desarrollo de la unidad didáctica, tuvo algunas dificultades en la habilidad para la coordinación motriz fina en el trazado, puesto que no tenía claro el manejo de los instrumentos de medida. También mostró dificultades en la habilidad para memorizar los procedimientos para el diseño; sin embargo, a partir de los rediseños que tuvo que hacer, fue un estudiante que haciendo uso de sus imágenes desde la memoria, logró hacer los diseños de triángulos satisfactoriamente.

El estudiante Tierra fue participativo y activo durante toda la unidad didáctica, mostrando sus destrezas en la asignatura. A pesar que tenía claridad con respecto a los procedimientos, el estudiante Tierra omitió algunos detalles que le exigió rediseñar triángulos.

Las dificultades del estudiante Aire estuvieron más focalizadas en la motricidad y la interpretación de las instrucciones durante el diseño. Aunque sus habilidades motrices y el acceso a sus imágenes concretas, se mostraron poco a poco en el desarrollo de la unidad didáctica, no fue suficiente para conectarlas con las otras habilidades e imágenes para realizar los diseños de triángulos. Sin embargo, fue un estudiante que alcanzó a reconocer sus errores en la verificación desde el proceso discursivo de configuración y con más claridad hizo sus rediseños.

El estudiante Agua, después de superar algunas dificultades que tuvo con la motricidad por el escaso reconocimiento que tenía de los instrumentos, mostró destreza en la interpretación de las instrucciones durante el diseño de los triángulos. Sin embargo, le costaba un poco hacer la identificación; en algunos momentos; de las imágenes dinámicas, al momento de reconocer posiciones y procedimientos diferentes para hacer los diseños de los triángulos.

7.3. Caracterización

A partir de las categorías anteriores se caracterizará el proceso cognitivo de Construcción Geométrica. Es de aclarar que aunque la investigación se hizo sobre el diseño de triángulos, puede ser aplicada a otro tipo de diseños de polígonos y representaciones de cuerpos geométricos. Los niveles para la construcción propuestos para este proceso, son:

Nivel 1: Motricidad

En este nivel, el docente posibilita actividades donde el estudiante tenga contacto con material concreto para identificar cuál es la predominancia en su lateralidad; y cómo se encuentra su motricidad fina, desde la motricidad gestual de la mano y la coordinación visomanual. También, el docente podrá analizar cuáles son las posibles dificultades que se puede encontrar el estudiante, al momento de abordar algún tipo de diseño y proponer actividades que posibiliten superar las mismas.

Este nivel también debe proporcionar a los estudiantes el contacto con los instrumentos que se van a manejar y cuáles son las potencialidades y usos de cada uno.

Los descriptores para rastrear en el estudiante el cumplimiento de la categoría de Motricidad, son:

- ✓ Reconocimiento visomanual de los instrumentos de medida.
- ✓ Reconocimiento de las imágenes concretas del concepto que se va desarrollar.
- ✓ Identificación de las imágenes concretas de un concepto en diferentes posiciones.

Nivel 2: Interpretación de las instrucciones durante el diseño

Este nivel, la interpretación de las instrucciones durante el diseño, debe tener como antesala la construcción de sentido en el estudiante frente al procedimiento que se va a usar. Esta construcción de sentido, se hace con la participación activa de los estudiantes, quienes siendo guiados por el docente, evocan las potencialidades que ofrecen los instrumentos y su manejo, para llevar a cabo el diseño, después de la decodificación del mensaje de la instrucción.

El estudiante en este nivel, debe analizar las IC y retomar las IM de manera que se articulen para mostrar las H1 y H4. Esta articulación es posible por la ejercitación previa que el docente haya guiado en el aula.

Los descriptores para rastrear en el estudiante el cumplimiento de la categoría de Interpretación de las instrucciones durante el diseño, son:

- ✓ Reconocimiento y aplicación de los procedimientos para el diseño haciendo uso de los instrumentos de medida.
- ✓ Reconocimiento de las imágenes concretas descritas en la instrucción y su trazado con los instrumentos de medida.
- ✓ Articulación de varias imágenes concretas, descritas en una instrucción, en un mismo diseño.

Nivel 3: Verificación desde el proceso discursivo de configuración

En el nivel de verificación por aprehensión discursiva, el docente debe guiar a los estudiantes a movilizarse mental y oralmente entre los dos tipos de representación, tanto el visual como el discursivo. El estudiante debe hacer un análisis de las IC que expresa el mensaje y que debe cumplir el diseño. De igual forma, el docente debe invitar al estudiante a expresar mensajes donde comunique el significado o sentido sus diseños para ser refutado o aprobado, permitiendo revisar cómo decodificó el mensaje o cómo lo codificó para hacerlo

llegar a sus compañeros. Así, el estudiante mostrará su H3 y la relacionará con las IP.

Los descriptores para rastrear en el estudiante el cumplimiento de la categoría de Verificación desde el proceso discursivo de configuración, son:

- ✓ Reconocimiento y utilización del lenguaje geométrico
- ✓ Reconocimiento de las imágenes concretas y sus diferentes posiciones en el espacio.

A continuación se muestra la tabla descriptiva que relaciona los niveles para la construcción con las habilidades para el diseño e imágenes mentales. En esta, se explicita si la habilidad o imagen se presentó (P), se presentó con algunas dificultades (PD) o no se presentó (NA) en los niveles para la construcción:

		Motricidad	Interpretación	Verificación
HABILIDADES	H1	PD	P	NA
	H2	NA	NA	PD
	H3	NA	NA	P
	H4	NA	PD	NA
IMÁGENES MENTALES	IC	P	P	P
	ID	PD	PD	P
	IM	NA	PD	NA
	IP	NA	P	NA

Ilustración 5: Tabla que relaciona los niveles para la construcción con las habilidades para el diseño y las imágenes mentales

A partir de la tabla de la ilustración 5, se puede resaltar que en el nivel de Motricidad, la habilidad de coordinación motriz fina en el trazado se presentó con dificultad, porque los estudiantes habían tenido poco contacto con los instrumentos de medida. Lo anterior generó, al inicio de la unidad didáctica, dificultad en la coordinación entre los elementos de la mano (dedos, palma, muñeca) y los instrumentos. Igualmente, se presentaron dificultades con las imágenes dinámicas, en la medida que los estudiantes no alcanzaban a reconocer, fácilmente, los elementos de los triángulos en posiciones diferentes a las convencionales.

En el nivel de Interpretación de las instrucciones durante el diseño, se presentó dificultad en la habilidad de memoria de procedimientos para el diseño. Los estudiantes durante algunos momentos de la unidad didáctica, olvidaron los procedimientos, lo que generó dificultades por dos posibles situaciones: rediseñaron un triángulo porque no correspondía a la instrucción o no realizaron el diseño hasta que recibieron ayuda de la docente-investigadora o de algún compañero. Igualmente, en este nivel, los estudiantes presentaron dificultades en las imágenes dinámicas y patrón. En las imágenes patrón, se observó que, aunque tenían claras las imágenes concretas descritas en la instrucción, se les dificultó relacionar todas las condiciones para diseñar un solo triángulo. En las imágenes dinámicas, la dificultad estuvo en que los estudiantes están acostumbrados a algunas posiciones de los triángulos, entonces cuando sus diseños no quedaron igual que los triángulos conocidos, los rediseñaron así cumplieran con la instrucción.

En el nivel de Verificación desde el proceso cognitivo de configuración, fue notoria la dificultad que los estudiantes presentaron para reconocer un diseño, con condiciones específicas, en diferentes posiciones para refutar o aprobar sus diseños y los diseños de sus compañeros.

A continuación se muestra la tabla que relaciona los descriptores, propuestos en cada nivel para la construcción, con las características mostradas por los

estudiantes. En esta, se explicita si el estudiante cumplió (C) o cumplió con dificultad (CD) cada uno de los descriptores:

Estudiantes Niveles/ Descriptores		Fuego	Tierra	Aire	Agua
					
Motricidad	Reconocimiento visomanual de los instrumentos de medida.	CD Dificultad en la articulación de imágenes concretas con un instrumento de medida	C	CD Dificultad en la articulación de imágenes concretas con un instrumento de medida	CD Dificultad en la articulación de imágenes concretas con un instrumento de medida
	Reconocimiento de las imágenes concretas del concepto que se va desarrollar.	C	C	CD Dificultad en la identificación de los elementos de los triángulos.	C
	Identificación de las imágenes concretas de un concepto en diferentes posiciones.	C	C	CD Dificultad en la lateralidad.	CD Dificultad en la lateralidad.
Interpretación de las instrucciones durante el diseño	Reconocimiento y aplicación de los procedimientos para el diseño haciendo uso de los instrumentos de medida.	C	C	CD Dificultad en la memorización de los procedimientos para los diseños.	C

	Reconocimiento de las imágenes concretas descritas en la instrucción y su trazado con los instrumentos de medida.	C	C	C	C
	Articulación de varias imágenes concretas, descritas en una instrucción, en un mismo diseño.	C	C	CD Dificultad en diseñar un triángulo al que se le especifican varias imágenes concretas	C
Verificación desde el proceso discursivo de	Reconocimiento y utilización del lenguaje geométrico	C	C	C	C
	Reconocimiento de las imágenes concretas y sus diferentes posiciones en el espacio.	CD Dificultad en la lateralidad	CD Dificultad en la lateralidad	CD Dificultad en la lateralidad	CD Dificultad en la lateralidad

Ilustración 6: Tabla sobre el cumplimiento de los descriptores

A partir de la tabla de la ilustración 6, son observables las dificultades que los estudiantes presentaron en la articulación de imágenes concretas con un instrumento de medida, y en la lateralidad. Se puede concluir que en el aula de clase, el docente debe posibilitar que los estudiantes tengan experiencias donde manipulen instrumentos de medida y los vinculen con imágenes concretas que les permitan llegar a la solución de algunas situaciones problema; también que el docente debe presentar en sus clases representaciones externas en diferentes posiciones para permitir que los estudiantes desarrollen más su lateralidad y puedan hacer reconocimiento de imágenes concretas sin importar el punto de vista desde donde las observen.

7.3.1. Proceso de Construcción Geométrica

El desarrollo del pensamiento geométrico, como se ha mencionado anteriormente, implica tres procesos cognitivos que se deben articular. Es por eso que a continuación se presenta un esquema que representa el proceso de Construcción Geométrica, los elementos que lo componen y el vínculo que tiene con los otros dos procesos cognitivos, el cual es:

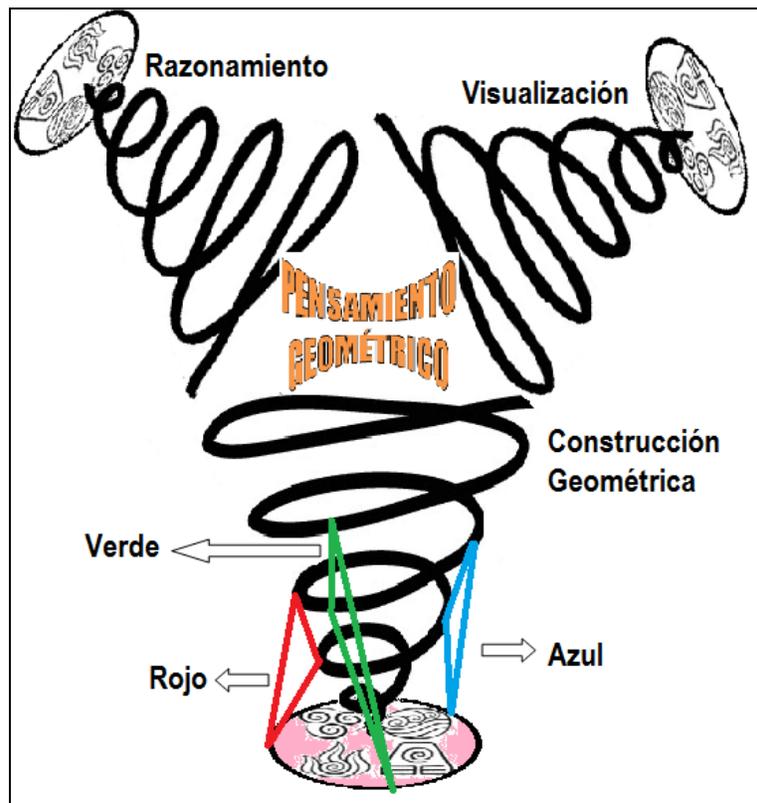


Ilustración 7: Esquema sobre el proceso de Construcción Geométrica

En el esquema anterior se representa el trabajo realizado con los estudiantes: Fuego, simbolizado con ; Agua, simbolizado con ; Aire, simbolizado con  y Tierra, simbolizado con , los cuales están inmersos en un contexto específico. Este contexto tiene lugar entre los barrios Villa Hermosa y Manrique central del

municipio de Medellín, en la Institución Educativa Pedro Luis Villa y en el grado quinto de educación básica.

Del análisis de datos que los estudiantes proporcionaron, se extrajeron tres niveles para la construcción que son simbolizados con los triángulos caracterizados así: el Rojo es la categoría de Motricidad, el Azul es la categoría de Interpretación de la instrucción durante el diseño y el Verde es la categoría de Verificación desde el proceso discursivo de configuración.

Estos tres niveles sostienen el proceso de Construcción Geométrica representado en espiral. En la medida que se avanza en la espiral, desde una menor hasta una mayor amplitud, los triángulos también crecen. De igual forma, los componentes que sostengan los procesos de Visualización y Razonamientos simbolizados con las otras dos espirales, a su vez pueden ser estudiadas por otros estudiantes en otros contextos escolares.

Las tres espirales se encuentran en el centro formando un nodo articulador conformado por los tres procesos cognitivos que constituyen y construyen el pensamiento geométrico.

8. Conclusiones

La caracterización del proceso cognitivo de Construcción Geométrica va más allá de solo analizar la representación externa. Este proceso implica la articulación de habilidades para el diseño e imágenes mentales, las cuales posibilitan comprender las condiciones para que este proceso se potencialice en los estudiantes y se vincule con los procesos cognitivos de Visualización y Razonamiento. Las características del proceso cognitivo de Construcción Geométrica desde cada uno de los niveles para la construcción, fueron:

- Motricidad: este nivel se caracterizó por la coordinación visomanual, la lateralidad y el manejo del espacio. Aquí los estudiantes mostraron

coordinación entre los elementos de su mano y reconocimiento de los instrumentos de medida, cómo se usan y las imágenes concretas con las que se relaciona cada uno. De igual manera, los estudiantes reconocieron un mismo dibujo en posiciones diferentes y estimaron el espacio que necesitaban para hacer sus diseños.

- Interpretación de las instrucciones durante el diseño: este nivel se caracterizó por el reconocimiento de las imágenes concretas descritas en una instrucción, las relaciones entre las mismas y la realización del diseño. Los estudiantes, haciendo uso de los instrumentos de medida, articularon las imágenes concretas que describían las instrucciones y realizaron los diseños.
- Verificación desde el proceso discursivo de configuración: este nivel se caracterizó por la decodificación y codificación de instrucciones, y por el reconocimiento de diferentes maneras para realizar el mismo diseño. Los estudiantes confrontaron lo descrito por la instrucción con su diseño y, haciendo uso de la palabra y el lenguaje, expresaron a sus compañeros lo realizado y comentaron lo que observaron en el diseño de los otros.

En la caracterización del proceso cognitivo de Construcción Geométrica se pudo explicitar las relaciones que este proceso tiene con los procesos cognitivos de Visualización y Razonamiento. La relación de los procesos cognitivos de Construcción Geométrica y Visualización se presentó desde las habilidades de visualización e imágenes mentales. Aunque en el proceso cognitivo de Construcción Geométrica se adaptaron las habilidades y se retomaron solo algunas imágenes mentales del proceso cognitivo de visualización, estas permitieron caracterizar el proceso de Construcción Geométrica. La relación de los procesos cognitivos de Construcción Geométrica y Razonamiento, se presentó desde el proceso discursivo de configuración. El proceso discursivo de configuración, al implicar la coordinación entre las aprehensiones discursiva y operativa, posibilitó conectar las representaciones externas con el uso de la

palabra y el lenguaje, para la verificación de los diseños realizados por los estudiantes.

La adaptación y aplicación de la unidad didáctica, basada en las fases orientadoras para el aprendizaje del Modelo de Van Hiele, posibilitó encontrar los vínculos entre el uso de los instrumentos de medida y el proceso cognitivo de Construcción Geométrica. Estos vínculos se evidenciaron en los niveles para la construcción de Motricidad e Interpretación de las instrucciones en el diseño. En estos niveles se pudo analizar que el uso de los instrumentos de medida requiere de la coordinación visomanual y lateralidad, lo que permitió que los estudiantes pudieran interpretar una instrucción y realizar un diseño.

9. Implicaciones pedagógicas

El trabajo con material concreto permitirá que los estudiantes obtengan avances en su motricidad. Las actividades que el docente proponga en el aula, deben apuntar al desarrollo de:

- La lateralidad, con el fin de permitir que los estudiantes movilicen las imágenes dinámicas. Igualmente, ésta posibilitará que los estudiantes tengan menos dificultades para ubicar los instrumentos de medida e identificar, diseñar y caracterizar representaciones pictóricas sin importar su posición.
- La motricidad fina, como factor que permite la identificación de los materiales, el manejo y las potencialidades que estos tengan.

De esta manera, la motricidad será un elemento favorecedor de motivación como se expresó en la categoría.

El reconocer que un estudiante adquiere un concepto y decodifica un mensaje, implica del docente interés durante el diseño de las representaciones y la

verificación. Si bien el estudiante es el protagonista de los proceso de enseñanza y aprendizaje, el rol del docente como actor activo y guía, es fundamental para solucionar dudas y retroalimentar constantemente el trabajo de los estudiantes.

Los estudiantes podrán tener más capacidades para reconocer y diseñar polígonos en varias posiciones, en la medida que los docentes posibiliten el acceso a estas. Es deber del docente romper algunas rutinas posicionales al momento de presentar conceptos, para que los estudiantes puedan articular habilidades para el diseño e imágenes mentales.

Trabajar en las clases de geometría con representaciones ya diseñadas, implicará un vacío procedimental, puesto que el desarrollo del pensamiento geométrico involucra los procesos cognitivos de visualización, razonamiento y construcción geométrica, y no sólo la relación entre los dos primeros. El docente debe proponer todos los tratamientos y conversiones posibles entre las representaciones que se trabajan en clase, para posibilitar un aprendizaje a profundidad.

El MEN (1998) menciona la transposición didáctica como un elemento indispensable del proceso de enseñanza y aprendizaje, donde el docente debe extraer del “conocimiento erudito” lo esencial para presentarlo a sus estudiantes, sin que este conocimiento pierda rigor y veracidad. De igual forma, la transposición didáctica tendrá lugar en el proceso de Construcción Geométrica en la medida que el docente busque las representaciones externas más pertinentes que posibiliten a los estudiantes acceder a conceptos geométricos progresivamente más complejos. Por esta razón, el docente debe hacer un trabajo reflexivo y juicioso de los diseños que propondrá, de manera que puedan tener significado y sentido trabajarlos en clase.

Es importante también que el docente explore a profundidad el Modelo de Van Hiele, desde sus niveles y las fases orientadoras para el aprendizaje, como lo propone el MEN (1998). Pues siendo una propuesta organizada y estructurada para trabajar en el aula, el docente debe analizar cuáles son los niveles

intermedios en los que se encuentran sus estudiantes y de esta forma plantear estrategias que permiten su desarrollo en el pensamiento geométrico.

10. Recomendaciones

Actualmente el uso de software de geometría dinámica ha desplazado, en gran parte, el uso de los instrumentos de medida físicos. La inmersión en la tecnología trae consigo muchas ventajas. Sin embargo, es importante estructurar y caracterizar el proceso de Construcción Geométrica, teniendo en cuenta la parte operativa (donde se usan applets o instrumentos de medida) y la parte teórica que sustenta el desarrollo en este proceso cognitivo.

Esta importancia radica en que la representación pictórica de una figura implica diferentes relaciones entre habilidades para el diseño con las imágenes mentales. Ignorar estas relaciones puede traer consigo que la representación pictórica se haga pero no tenga sentido para el estudiante ni desde el cómo se diseñó ni cuál fue el contenido científico o conceptual implícito en ella. Por lo anterior se invita a que, en investigaciones futuras, se aplique la caracterización del proceso de construcción geométrica en software de geometría dinámica; y así poder ampliar más este campo de investigación.

Las instituciones educativas deben establecer momentos específicos para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, donde los estudiantes tengan los tiempos y momentos precisos para construir sentido alrededor de la geometría y así respetar sus ritmos personales de aprendizaje de este campo tan fundamental para el desarrollo humano.

11. Referencias bibliográficas

- Aranda, C., & Callejo, M. (2001). Aproximación al concepto de función primitiva: un experimento de enseñanza con apolets de geometría dinámica. I.E.S. Número 3 La Vila Joiosa , 247-255.
- Ardanaz, T. (2009). La psicomotricidad en la educación infantil. Innovación y experiencias educativas .
- Ballesteros, I., & Rojas, D. (2011). Conceptualización de área del rectángulo con la medición del programa Cabri Geometry. Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus aplicaciones (págs. 169-172). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Bartolini Bussi, M., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. Handbook of international re-search in mathematics education.
- Camargo, L., Pérez, C., Plazas, T., Perry, P., Samper, C., & Molina, O. (2013). Enseñanza de la geometría mediada por artefactos: teoría de la mediación semiótica. Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (págs. 85-96). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Cardona, A. (s.f.). Geometría: 3º y 4º de enseñanza media. Medellín: Bedout.
- Carrasco, J. (2011). Enseñar hoy. Didáctica básica para profesores. ISBN: 978-84-975676-3-3 , 14-22.
- Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., & Acosta, M. (2004). Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

- Coll, C. (1988). Significado y Sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo. *Infancia y Aprendizaje* , 131-142.
- Crowley, M. (1987). The Van Hiele Model of the development of Geometric Thought. National Council of Theachers of Mathematics.
- D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática). Vol. 17, n° 1 , 87-106.
- Duval, R. (2001). La geometría desde un punto de vista cognitivo. Consultado el 9 de septiembre de 2013 en <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>.
- Duval, R. (1999). Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo. (M. Vega, Trad.) Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Euclides. (s.f.). Elementos. (M. L. Puertas, Trad.) Gredos.
- Foucault, M. (1975). Vigilar y Castigar. Buenos Aires: Siglo veintiuno editores.
- Fraile, J. (1999). Matemáticas 5. Barcelona: Vicens Vives Primaria .
- Gualdrón, É. (2011). Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas. Valencia.
- Gutiérrez, Á. (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la Geometría en los niveles de primaria y secundaria. Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus aplicaciones (págs. 3-14). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill.

- Jara, P., & Ruiz, C. (s.f.). Triángulos. Granada: ESTALMAT- Andalucía.
- Londoño, D., & Molano, A. (2007). Las aplicaciones del arte y su relación con las transformaciones geométricas. Medellín: Artes y Letras Ltda.
- Melo, C. (2001). Dominos 5. Bogotá: Escualeas del Futuro.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Serie de Lineamientos Curriculares Matemáticas. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Mora, J. (s.f.). Los Recursos Didácticos en el aprendizaje de la geometría .
- Múnera, N. (2013). La caracterización de polígonos a partir de los instrumentos de medida. Medellín: Consultado en 2014 de <http://nalocomu.blogspot.com/>.
- Ochoa, A. (2007). La psicomotricidad fina a través de la psicomotricidad gruesa. Zamora-Michoacan.
- Osorno, C. (2014). Propuesta integradora para el desarrollo del pensamiento geométrico en estudiantes con discapacidad intelectual. Medellín.
- Osorno, C., Ramírez, V., & Múnera, N. (2014). Desarrollo de pensamiento geométrico: un recorrido desde la educación matemática hasta el modelo de Van Hiele. Medellín: Consultado el 27 de enero de 2014 en <http://desarrollodelpensamientoespacial.blogspot.com/>.
- Pérez, E., Palacios, E., & Villamizar, A. (1995). Enciclopedia Matemática MEGA. Bogotá: Terranova.
- Piedrahíta, W., Londoño, J., & Uribe, E. (2009). La enseñanza de la geometría con fundamento en la solución de problemas cotidianos. Medellín.

- Piedrahíta, W., & Vásquez, B. (s.f.). Alternancia de las representaciones en educación matemática. La aritmética con la relación representacional para la construcción conceptual de las cuatro operaciones básicas. Medellín.
- Quijano, J. (2011). Cabri como herramienta didáctica en la Institución Educativa Rural. Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus aplicaciones (págs. 284-291). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Ramírez, V. (2014). Estrategia didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientada por el modelo Van Hiele y Geogebra. Medellín.
- Ságari, A., & Pérez, C. (2011). Construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia de Geogebra. Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus aplicaciones (págs. 307-322). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Tamayo, Ó. (2009). Didáctica de las ciencias: La evolución conceptual en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. Manizales: Universidad de Caldas.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática. Numero 002. , 275-299.
- Vasco, C. (s.f.). Pedagogía y Didáctica. Primer Coloquio Nacional sobre Didáctica de la Lengua.
- Villiers, M. d. (1996). Algunos desarrollos en enseñanza de la geometría. The Future of Secondary School Geometry .

12. Anexos

Anexo 1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA PEDRO LUIS VILLA

Estudiante: _____

Grado: 5º _____

Área: Matemáticas

Fecha: _____

Asignatura: Geometría

Tipo de Gula: _____

Docente: Natalia Múnera Escobar

Tiempo de duración: 5 clases

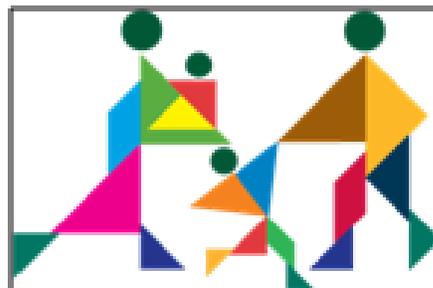
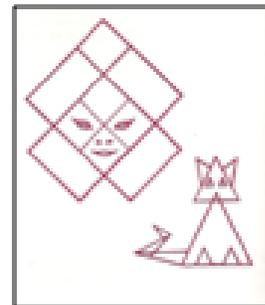
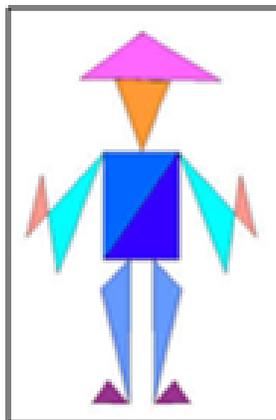
Estándares relacionados desde el pensamiento espacial y sistemas geométricos

- ✓ Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
- ✓ Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.
- ✓ Construyo y descompongo figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.

LOS TRIÁNGULOS

Martha, que tiene una tienda donde vende refrescos, regala a su hijo Cristóbal una caja de pabillos que le sobró.

Cristóbal recorta los pabillos de diferentes tamaños y con ellos quiere construir triángulos. Luego de tener los triángulos, quiere diseñar una composición artística que decore su cuarto. Está pensando en composiciones como estas:



I. ARMEMOS

Los triángulos son polígonos, es decir que son figuras planas y cerradas, cuyos lados son segmentos de recta, y los puntos donde se unen dos segmentos de recta se llaman vértices.

Cuando en los triángulos se miden los lados (los segmentos rectos) y los ángulos, estos se pueden clasificar de acuerdo con las características comunes que entre ellos comienzan a aparecer.

Busca un compañero y con él sigan las instrucciones:

1. Recorten los pabillos con las siguientes medidas:
 - a. 4 pabillos de 3cm.
 - b. 4 pabillos de 4cm.
 - c. 4 pabillos de 5cm.
 - d. 4 pabillos de 6cm.
 - e. 4 pabillos de 7cm.
 - f. 4 pabillos de 8cm.
 - g. 4 pabillos de 9cm.
 - h. 4 pabillos de 10cm.

2. Construyan y peguen los siguientes triángulos:
 - a. Un triángulo que tenga todos sus lados de 4cm.
 - b. Un triángulo que tenga dos lados de 10cm y un lado de 5cm
 - c. Un triángulo que tenga sus lados de 9cm, 8cm y 7cm.
 - d. Un triángulo que tenga dos lados de 3cm y un lado de 6cm
 - e. Un triángulo que tenga sus lados de 4cm, 5cm y 10cm.
 - f. Un triángulo que tenga dos lados de 6cm y un lado de 10cm.

3. Respondan:
 - a. ¿Todos los triángulos del anterior punto se pudieron construir? ¿Por qué?

- b. ¿Cuál debe ser la condición, que Cristóbal debe tener en cuenta, para construir los triángulos?

COMUNIQUEN, AL GRUPO, LAS CONCLUSIONES A LAS QUE HAN LLEGADO

II. MIDAMOS

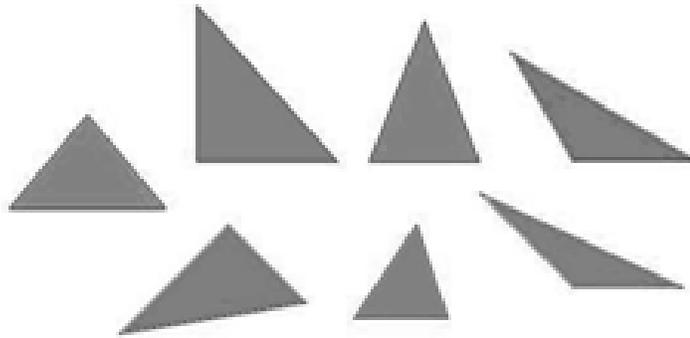
Cristóbal, cuando estaba armando los triángulos con los pitillos, pudo darse cuenta que hay varios tipos de estos polígonos.

Cuando los analizaba se hizo algunas preguntas sobre los triángulos. Ayúdale a Cristóbal a responderlas:

- ¿Siempre todos los lados deben tener la misma longitud? _____
- ¿Siempre todos los lados deben tener diferente longitud? _____
- ¿Los ángulos que se forman en su interior, siempre deben ser agudos? _____
- ¿Los ángulos que se forman en su interior, siempre deben ser rectos? _____
- ¿Los ángulos que se forman en su interior, siempre deben ser obtusos? _____

Con la ayuda de un compañero, realiza las siguientes actividades:

1. Observen y manipulen los triángulos de madera, ¿todos son iguales? ¿por qué?



2. Midan los lados y los ángulos de cada uno de los triángulos de madera y completen la

tabla:

Número del triángulo	Amplitud del \sphericalangle 1 y nombre	Amplitud del \sphericalangle 2 y nombre	Amplitud del \sphericalangle 3 y nombre	Medida lado a en cm y mm	Medida lado b en cm y mm	Medida lado c en cm y mm

3. Observen los resultados que escribieron en la tabla anterior y completen:

En algunos triángulos todos los lados son: IGUALES ____, DIFERENTES ____, DOS LADOS IGUALES ____

En algunos triángulos todos los lados son: IGUALES ____, DIFERENTES ____, DOS LADOS IGUALES ____

En algunos triángulos sólo dos lados son: IGUALES ____, DIFERENTES ____, DOS LADOS IGUALES ____

Observando los ángulos interiores de los triángulos, donde pueden ser agudos, rectos u obtusos,

Cristóbal encontró que:

Algunos triángulos tienen un ángulo _____ y dos ángulos _____.

Algunos triángulos tienen un ángulo _____ y dos ángulos _____.

Algunos triángulos tienen tres ángulos _____.

4. Analizando las medidas en la tabla anterior, ¿cuánto deben sumar los ángulos interiores de cualquier triángulo? ¿por qué?

UN POCO DE DIVERSIÓN

Busca, en la sopa de letras, las palabras que te indican:

E	E	Q	U	I	L	A	T	E	R	O	Q	D
W	S	E	M	B	Ñ	R	C	T	V	P	S	V
O	A	C	U	T	A	N	G	U	L	O	E	I
O	B	T	U	S	A	N	G	U	L	O	L	S
L	B	N	E	L	N	S	G	V	C	J	E	O
U	T	G	G	K	E	A	C	W	L	Z	C	C
G	S	U	I	N	I	N	S	A	R	L	S	E
N	X	E	S	C	A	L	E	N	O	K	O	L
A	F	O	M	B	T	T	A	A	T	E	S	E
T	A	Y	W	H	L	W	C	T	B	B	I	S
C	K	H	Ñ	O	F	Y	J	E	E	S	O	A
E	X	C	C	T	A	C	A	Y	R	R	H	D
R	Q	Q	X	R	G	I	G	C	A	A	O	X

Palabras a buscar:

RECTANGULO
OBTUSANGULO
ACUTANGULO
ESCALENO
EQUILATERO
ISOSCELES

PARTICIPA ACTIVAMENTE PARA DEFINIR QUE A QUÉ TIPO DE TRIÁNGULO CORRESPONDEN CADA UNO DE LOS NOMBRES BUSCADOS EN LA SOPA DE LETRAS

III. DISEÑEMOS TRIÁNGULOS

Diseñemos triángulos con regla, compás y transportador.

APRENDIENDO

- ✓ Tu profesora explicará dos formas de hacer el diseño de triángulos con un manejo adecuado de los instrumentos de medida. Este momento requiere de ti estar atento y realizar las preguntas que te vayan surgiendo.

DISEÑANDO

- ✓ Recordando el uso de los instrumentos de medida, reúnete con otro compañero y construyan y nombren los siguientes triángulos según sus lados y sus ángulos:
 1. Un triángulo que tenga un ángulo de 110° , en el que los lados del ángulo, midan 6cm.
 2. Un triángulo que tenga un ángulo de 70° , en el que los lados que forman el ángulo, midan: 5cm y 13cm, respectivamente.
 3. Un triángulo en el que todos los lados midan 7cm.
 4. Un triángulo que tenga un ángulo de 90° y los lados que forman el ángulo, midan 5cm.
 5. Un triángulo que tenga dos ángulos de 60° .
 6. Un triángulo en el que los lados midan 5cm, 7cm y 4cm., respectivamente.
 7. Un triángulo que tenga un ángulo de 90° y otro de 100° .

CREANDO

- ✓ Diseñen los siguientes triángulos. Estos triángulos pueden tener la medida que ustedes deseen:
 - a. Un triángulo isósceles acutángulo
 - b. Un triángulo equilátero acutángulo
 - c. Un triángulo rectángulo escaleno
 - d. Un triángulo obtusángulo isósceles

IV. DISEÑANDO TESELACIONES

Una teselación es una superficie que está cubierta con dibujos de manera que no están uno encima de otro y tampoco hay huecos.

Los siguientes dibujos son ejemplos de teselaciones:



Construye tu propia teselación de triángulos y a cada uno asignale un color dependiendo de las características que tenga, de manera que puedas hacer una composición artística nueva, creativa y colorida. Por ejemplo, que todos los triángulos equiláteros acutángulos sean verdes.



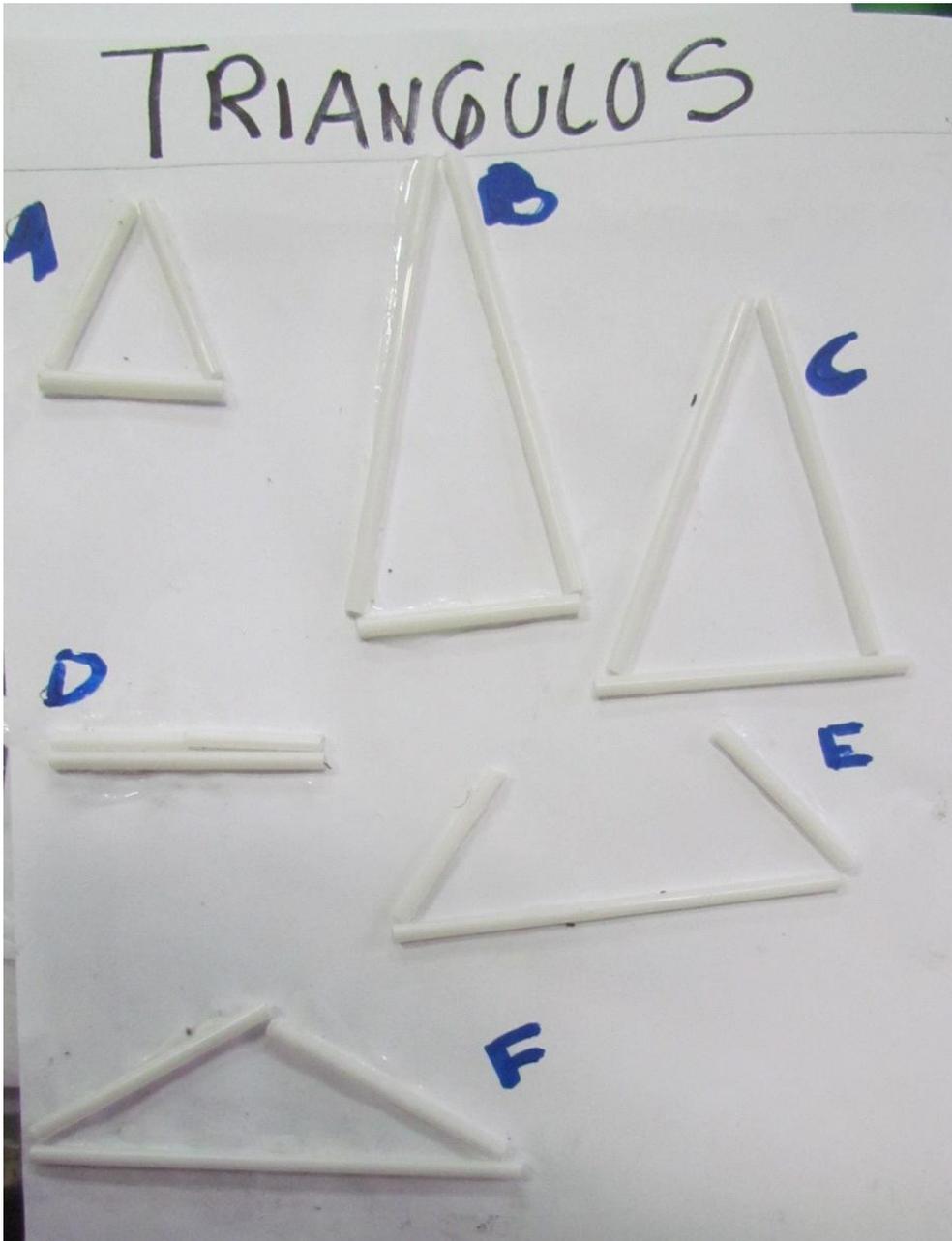
V. EXPOSICIÓN DE TESELACIONES

Muéstrale a tus compañeros la teselación que construiste y explícales si te hacen preguntas.

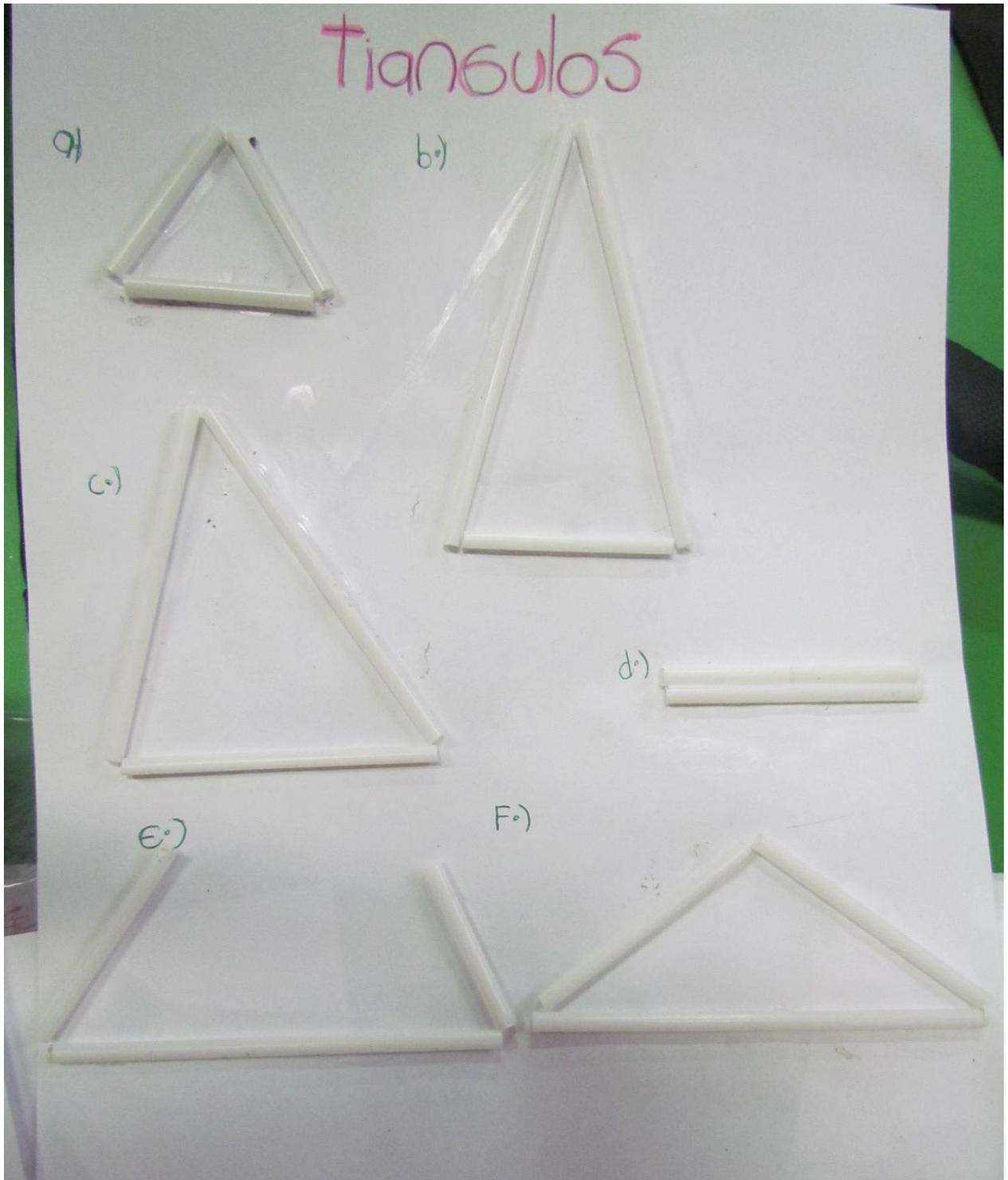
Anexo 2

Las siguientes son algunas fotografías del trabajo de los estudiantes durante el desarrollo de la unidad didáctica:

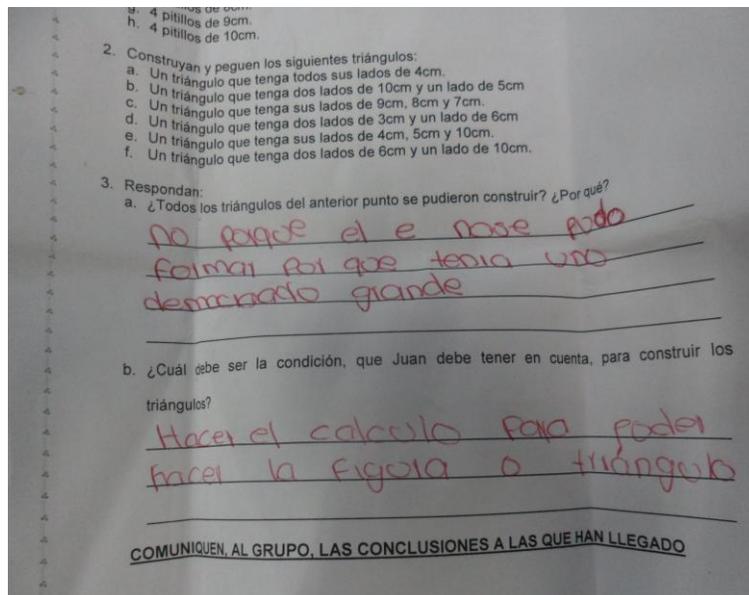
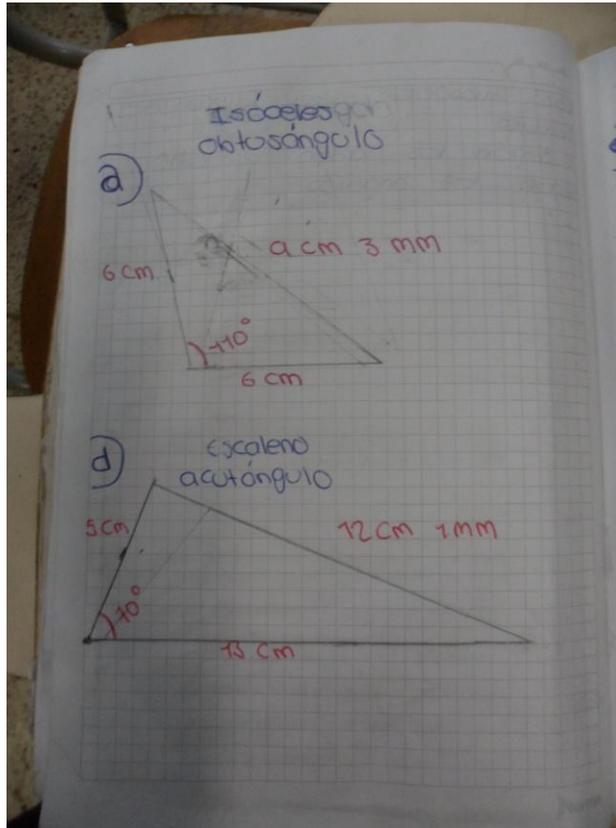
Trabajo en parejas (estudiantes Aire y Agua)



Trabajo en parejas (estudiantes Tierra y Fuego)

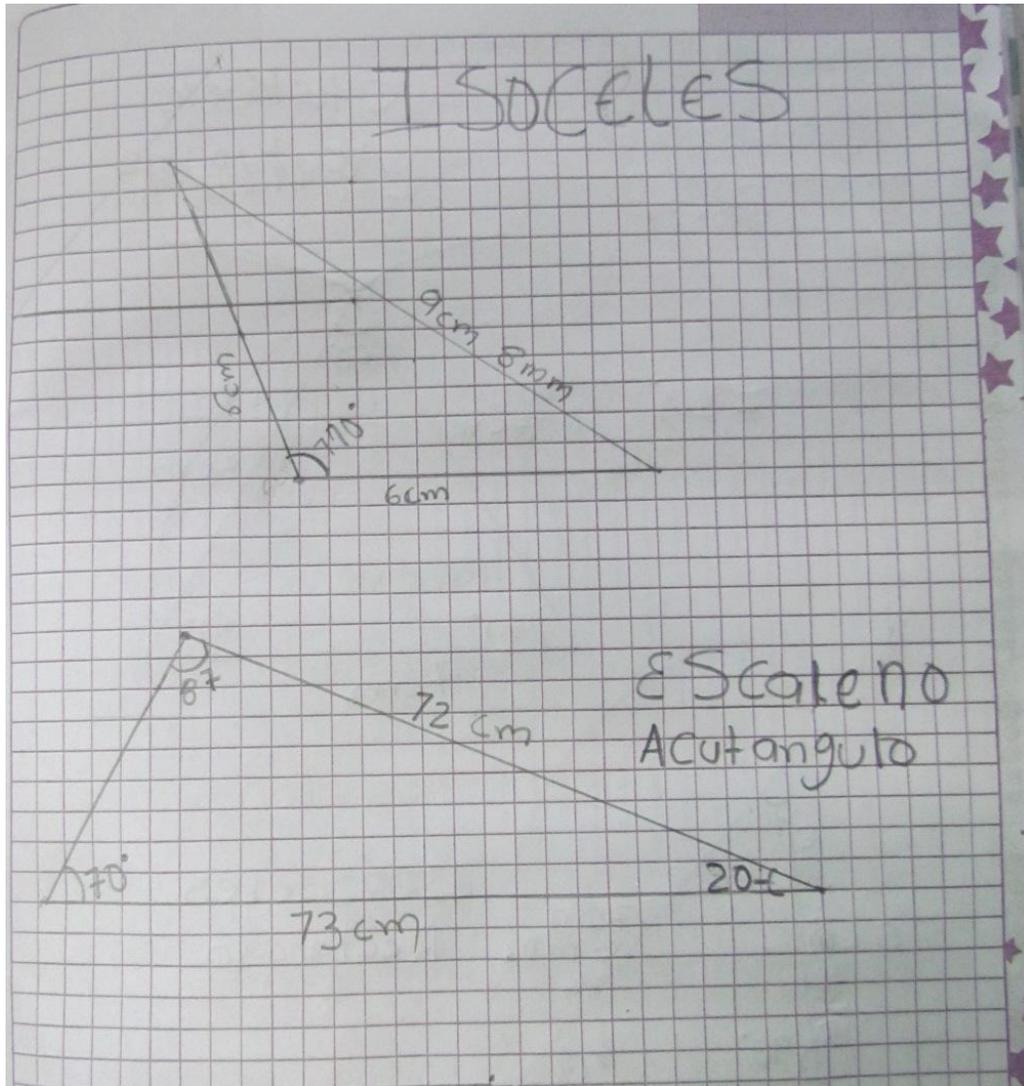


Trabajo personal del estudiante Tierra

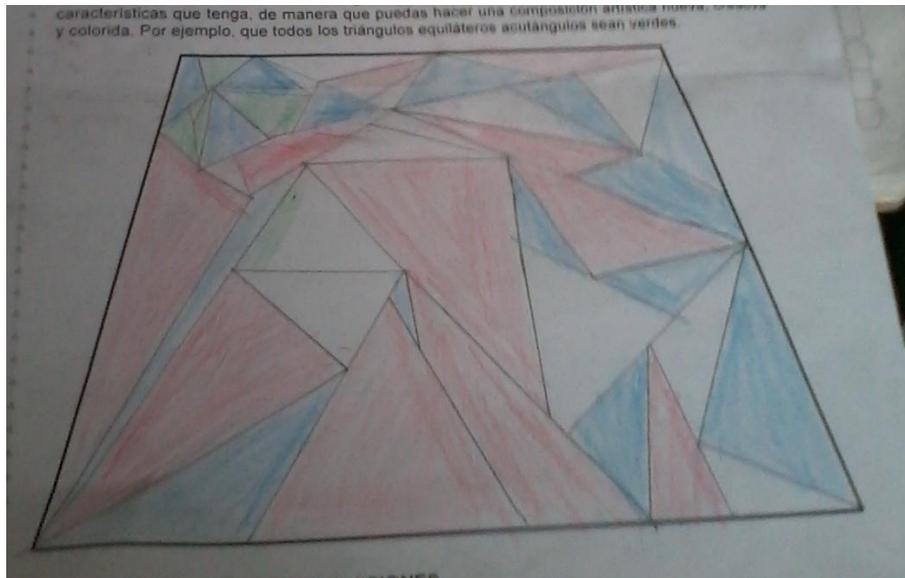
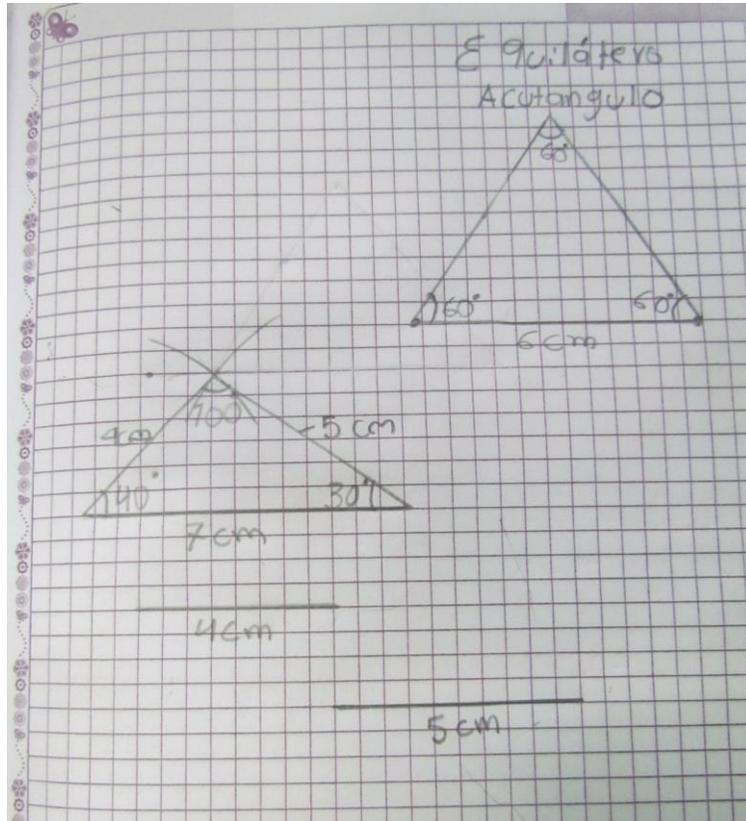




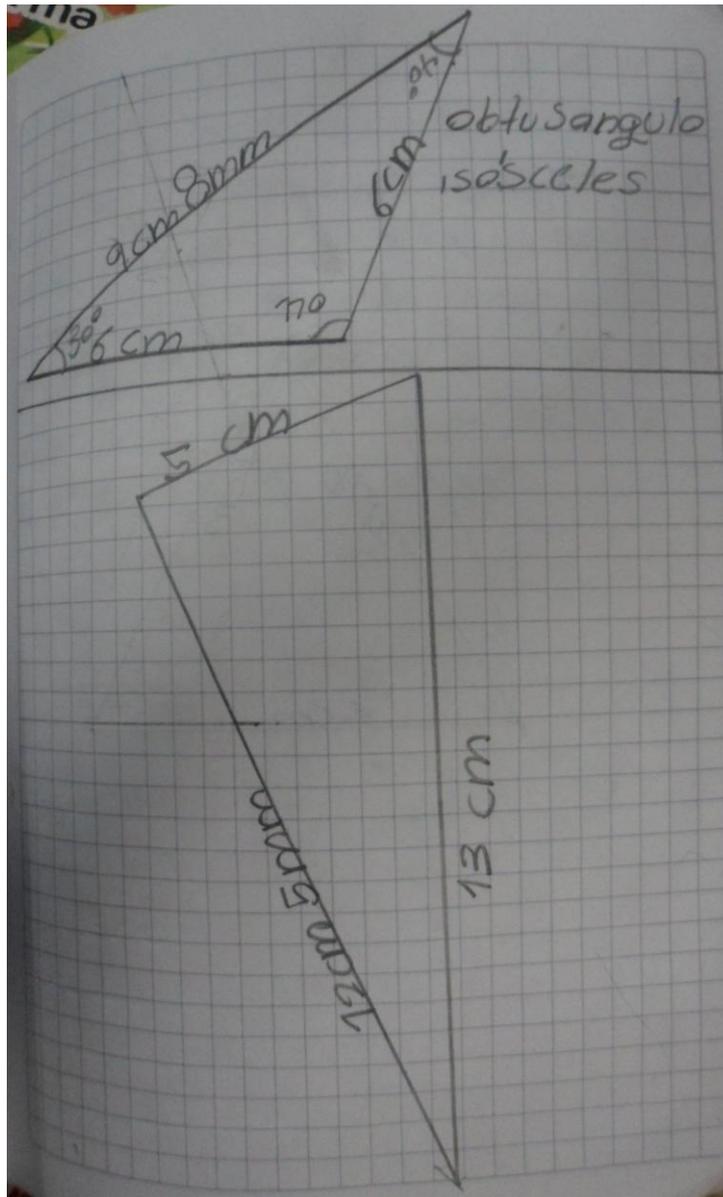
Trabajo personal del estudiante Aire

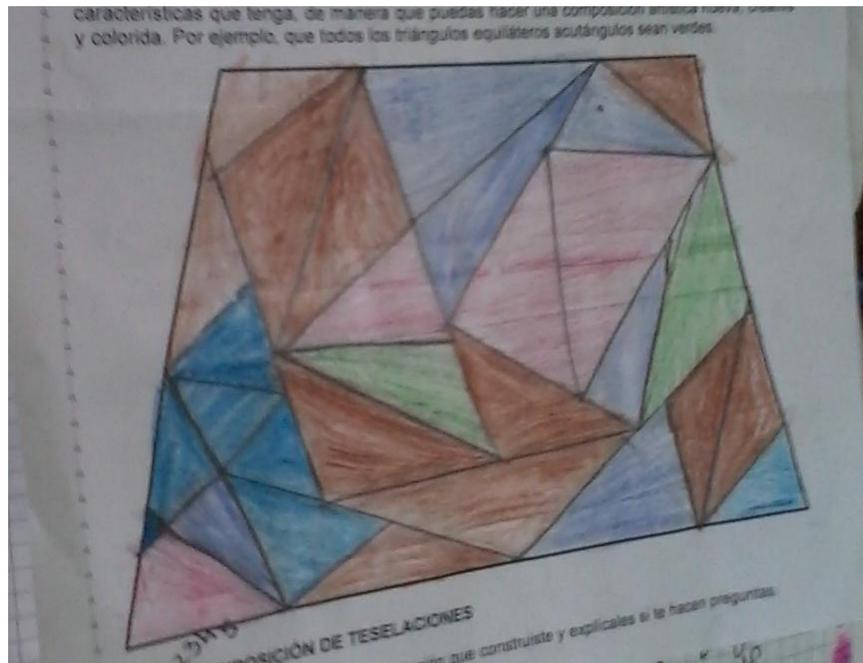
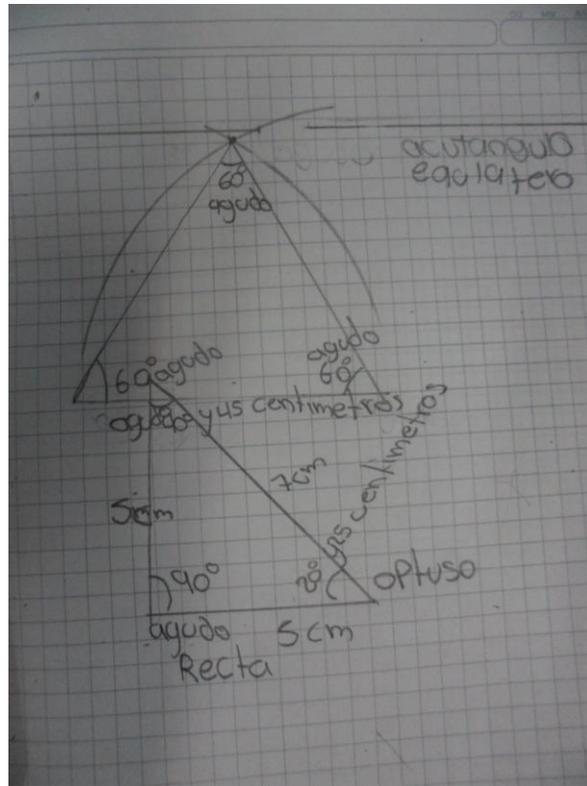


3. Respondan:
a. ¿Todos los triángulos del anterior punto se pudieron construir? ¿Por qué?
No algunos no daban por que erande
diferentes tamaños

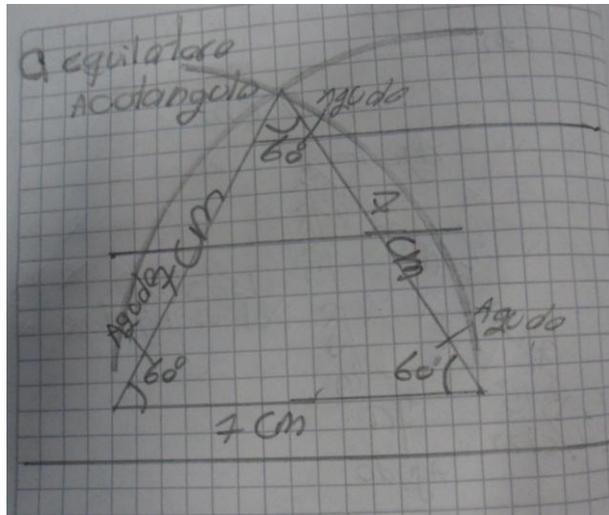
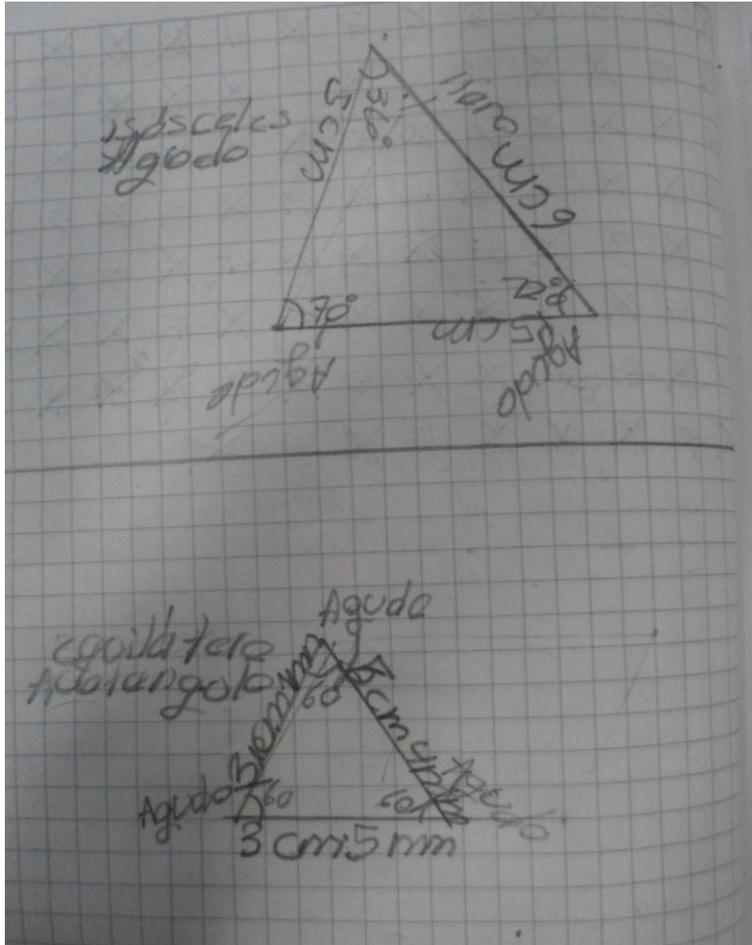


Trabajo personal del estudiante Agua





Trabajo personal del estudiante Fuego



2. Midan los lados y los ángulos de cada uno de los triángulos de madera y completen la tabla:

Número del triángulo	Amplitud del $\triangle 1$ y nombre	Amplitud del $\triangle 2$ y nombre	Amplitud del $\triangle 3$ y nombre	Medida lado a en cm y mm	Medida lado b en cm y mm	Medida lado c en cm y mm
101	55° Agudo	77° Agudo	58° Agudo	16° Cm	15° cm 8 mm	18° cm 3 mm
104	62° Agudo	67° Agudo	61° Agudo	12 cm 3 mm	12 cm 8 mm	17 cm 3 mm
106	35° Agudo	100°s Recto				

Diferentes
iguales



Anexo 3

Medellín, mayo 5 de 2014

Familia

[Redacted]

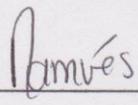
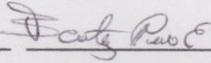
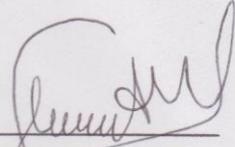
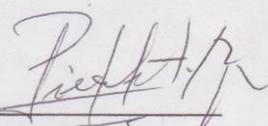
Cordial saludo.

En las clases de matemáticas del grupo 5°, en la cual participa su hija, estoy desarrollando un proyecto de investigación denominado "Caracterización del proceso de construcción geométrica en el diseño de triángulos". El objetivo de este proyecto es caracterizar el proceso de construcción geométrica en el diseño de triángulos, en estudiantes de quinto grado de la Institución Educativa Pedro Luis Villa de Medellín.

Quiero, de manera formal, solicitar la autorización para que [Redacted] forme parte de la investigación como participante, aclarando que su nombre no será revelado en el informe final.

Esta autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hija en forma de grabaciones, fotos, videos, las guías de trabajo en clase, entre otras.

Agradezco su atención y colaboración

			
NATALIA MÚNERA E.	BEATRIZ PINO	FLOR DE AZALIA VILLA	WILSON A. PIEDRAHITA
Estudiante investigadora	Docente de matemáticas	Rectora	Asesor de la investigación

Maestría en Didácticas de las Matemáticas Universidad de Caldas

Autorizamos la participación de [Redacted] en el proyecto de investigación denominado "Caracterización del proceso de construcción geométrica en el diseño de triángulos"

FIRMA DEL PADRE

FIRMA DE LA MADRE

FIRMA DEL ESTUDIANTE

Anexo 4

Unidad didáctica tomada de Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009).

**INSTITUCIÓN EDUCATIVA
RAFAEL J. MEJÍA**

Estudiante: _____ Grado: _____
Área: Matemáticas Fecha: _____
Asignatura: Geometría

Pitágoras
Matemático, filósofo, astrónomo, músico y místico griego
"La felicidad consiste en poder unir el principio con el fin."

TEOREMA DE PITÁGORAS

CONSTRUCCIÓN EN LA CIUDAD

El siguiente plano representa cuatro (4) avenidas de la ciudad (Central, S, L y M), que encierran dos zonas verdes (1 y 2) de igual área. Se planea construir una zona de parqueo en una de las zonas verdes (cruce entre las avenidas L y M) y para ello se requiere conocer qué fracción de la zona verde ocupará la zona de parqueo y qué cantidad de malla se necesita para encerrar ambas zonas verdes.

NOTA: Reúnete con dos compañeros o compañeras y conforma un equipo para desarrollar todas las actividades de la presente guía.

- a. ¿Qué tipos de triángulos y qué tipos de ángulos están representados en el plano de la situación problema?
- b. ¿La igualdad de áreas de las zonas verdes que plantea la situación, implica que haya igualdad de los lados en ambas zonas verdes?
- c. ¿Para qué nos servirá resolver la situación problema planteada?

II. ANIMÉMONOS A EXPLORAR

Mi equipo de trabajo recibirá un juego de figuras planas con las cuales debemos desarrollar lo siguiente:

- a. Seleccionamos el triángulo rectángulo de nuestro juego de figuras y en cada lado del triángulo construimos un cuadrado con las demás figuras.
- b. Comparamos las medidas de las áreas del cuadrado mayor con las medidas de las áreas de los dos cuadrados contruidos con los lados menores.
- c. Escribimos nuestras conclusiones de la situación anterior.

CONSTRUCCIÓN

Mi equipo de trabajo deberá conseguir un pliego de cartulina, cartón paja o MDF y con él desarrollar las siguientes actividades:

- a. Trazamos un triángulo rectángulo con las siguientes dimensiones: 6 cm., 8 cm. y 10 cm.
- b. Sobre cada lado del triángulo dibujamos un cuadrado cuya base será de la misma longitud.
- c. Trazaremos la cuadrícula de 1 cm² dentro de cada cuadrado construido.
- d. Comparamos el número de cuadrículas del cuadrado mayor con el número de cuadrículas de los cuadrados menores. ¿Qué conclusión podemos sacar de dicha comparación?
- e. Construimos con cada cuadrado un rompecabezas conformado por máximo 4 figuras geométricas. Posteriormente, mi equipo hará una exposición sobre: el material construido, las conclusiones escritas y la respuesta a la siguiente pregunta:
¿Cómo el rompecabezas construido por nuestro equipo, puede servir para resolver la situación problema planteada al inicio de esta guía?

III. EXPOSICIÓN DE NUESTRO TRABAJO

Nuestro equipo recibirá cinco (5) juegos de rompecabezas contruidos por los otros equipos de mi grupo, con los juegos recibidos, deberemos construir los rompecabezas en el menor tiempo posible. Posteriormente participar en una discusión con las conclusiones escritas en el numeral II. Tener presente que se debe respetar la palabra de los compañeros que exponen.

IV. APLICAMOS LO APRENDIDO

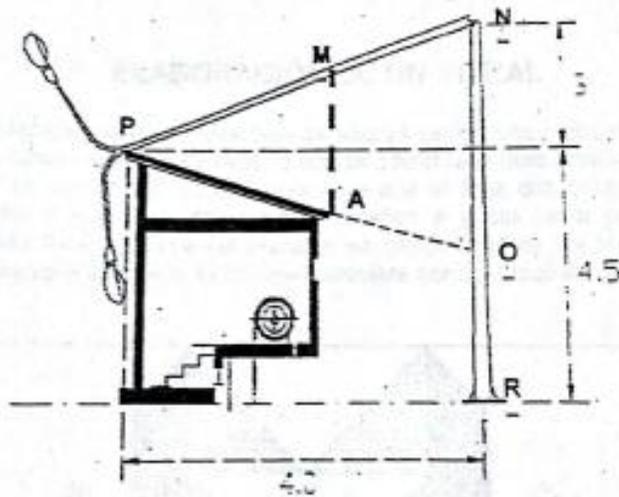
Nuestro profesor resolverá la situación problema plateada, para lo cual se requiere estar atentos y tomar notas en el cuaderno.

Construyo con mi equipo de trabajo una situación problema diferente a la presentada en esta guía; en ella debemos aplicar los conceptos estudiados, escribirla en una hoja, resolverla y entregarla a nuestro profesor.

V. RELACIONEMOS LO APRENDIDO

- a. Resuelvo con la ayuda de mi equipo la siguiente situación problema:

Un poste que sostiene una lámpara se rompe, queda apoyado en la parte superior de una caseta; tal como aparece en la figura. Asumiendo que todas las medidas de la figura están en metros, se requiere saber cuál es la altura original del poste de luz. para poder hacer su reemplazo por un poste nuevo.



- b. Desarrollamos una actividad para manejar el material geométrico que nos entregará el profesor, siguiendo sus instrucciones.

**"Que no entre aquí quién no sepa de geometría"
Platón**

Anexo 5

Unidad didáctica tomada de Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009).

INSTITUCIÓN EDUCATIVA
RAFAEL J. MEJÍA

Estudiante: _____ Grado: _____
Área: Matemáticas Fecha: _____
Asignatura: Geometría Tipo de guía: _____
Docente: _____ Duración: _____

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Indicadores de Logro.

1. Reconoce las diferentes características y conceptos de congruencia en los triángulos para su posterior aplicación en construcciones geométricas.
2. Aplica propiedades y teoremas de congruencia de triángulos para resolver problemas y realizar demostraciones y cálculos.
3. Identifica las propiedades de congruencia para su adecuada aplicación en la solución de problemas geométricos.

ELABORACIÓN DE UN VITRAL

Un cerrajero especialista en la construcción de vitrales recibe una propuesta para diseñar un vitral con una cantidad de triángulos rectángulos de diferente textura provistos por el cliente. El vitral debe tener tal distribución de la figuras para que el área que ocupe sea máxima. Las figuras No 1 y No 2 presentan dos posibles diseños a gusto de la persona que hizo la propuesta, la figura No 3 presenta las medidas en centímetros de los triángulos rectángulos provistos por el cliente al cerrajero. El cerrajero requiere conocer cuál de los 2 diseños ocupa la mayor área.

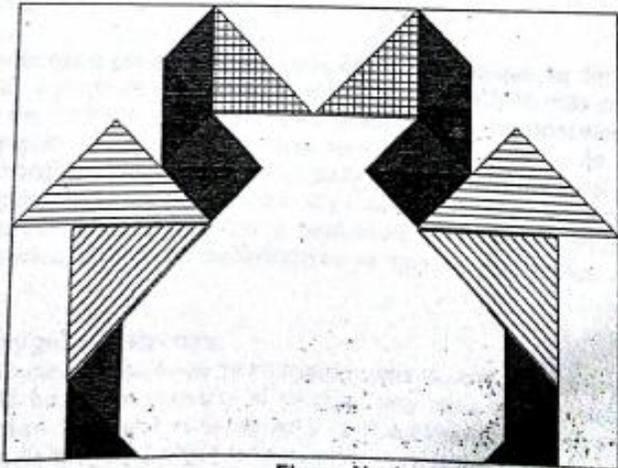


Figura No 1

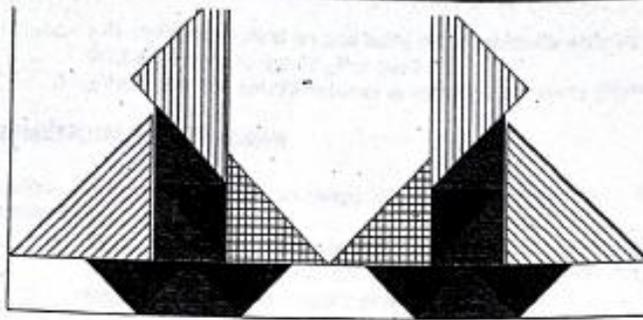


Figura No 2

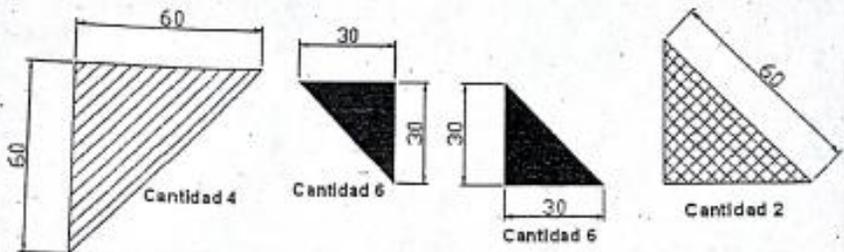


Figura No 3

NOTA: Reúnete con dos compañeros o compañeras y conforma un equipo para desarrollar todas las actividades de la presente guía.

I. INFÓRMATE

Los vitrales propuestos por el cliente son una variación de lo que se denomina "Tabla de la sabiduría" o juego de los "Siete Elementos" de origen Chino mas conocido como Tangram. Los elementos del juego son: 2 triángulos rectángulos isósceles grandes, un triángulo rectángulo isósceles mediano cuya área es la mitad de un de los triángulos grandes, dos triángulos isósceles pequeños (cada uno tiene un área igual a la mitad del área del triángulo mediano), un cuadrado cuyo lado es igual al lado de uno de los triángulos pequeños y un paralelogramo cuya altura es igual al lado de uno de los triángulos pequeños. El área del paralelogramo es igual al área de los dos triángulos pequeños.

Respondo con mi grupo lo siguiente:

- a. ¿Cuáles triángulos de los entregados para el vitral son congruentes?
- b. ¿Si buscamos convertir el vitral en una tabla de los siete elementos, cuales triángulos sería necesario unir? Enumera los triángulos de la figura 1 o de la figura 2 según indicaciones del profesor.

- c. ¿Al convertir el vitral en una tabla de la sabiduría será posible que el área final del vitral sea igual? ¿Por qué?
- d. ¿Para qué nos servirá resolver la situación problema planteada?

II. ANIMÉMONOS A EXPLORAR

- Mi equipo de trabajo recibirá un juego de los siete elementos, con él debemos desarrollar lo siguiente:
- a. Seleccionamos el paralelogramo de nuestro juego de figuras y a partir de este construiremos una de la figuras del siguiente mosaico (figura 4) según indicación de nuestro profesor.

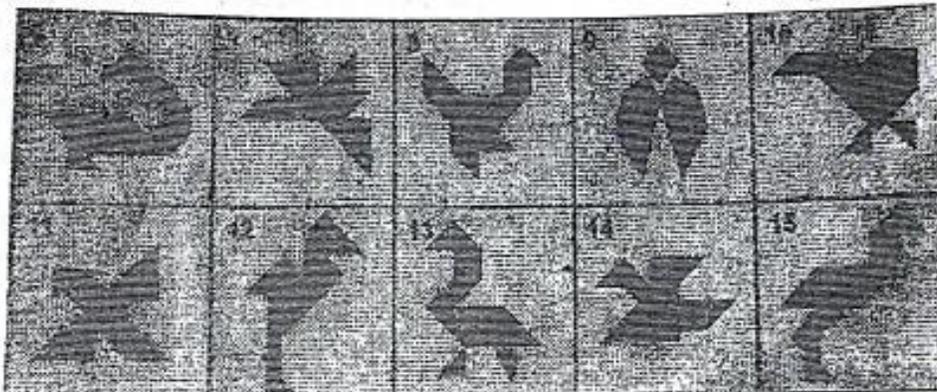


Figura 4

- b. Escribimos nuestras conclusiones de la situación anterior.

CONSTRUCCIÓN

Mi equipo de trabajo deberá conseguir un pliego de cartulina, cartón paja o MDF y un compás. Con ellos desarrollar las siguientes actividades:

- a. Dibujamos 3 puntos no colineales en un trozo de material cuadrado de 20 centímetros de lado aproximadamente y les colocaremos punto A, punto B y Punto C.
- b. Medimos las distancias de A hasta B, de B hasta C y desde C hasta A en milímetros.
- c. En otro trozo de material trazaremos un segmento de línea cuya longitud sea igual a la medida de una de las distancia tomadas en el punto anterior. Marcaremos los extremos como punto 1 y punto 2.
- d. Con abertura en el compás igual a una distancia de las tomadas y diferente a la distancia del segmento de línea, ubicamos el centro en el punto 1 de la línea y trazamos un arco que quede ubicado a uno de los costados de la línea trazada

- e. Abrimos el compás hasta lograr una abertura igual a la tercera medida y colocamos el punto fijo en el punto 2 de la línea. Luego trazamos un arco que se cruce con el arco dibujado en el punto anterior.
- f. Trazaremos dos segmentos de línea: uno que una el punto donde se cortan los arcos con el punto 1 y otro con el punto 2.
- g. Recortamos el triángulo trazado y trataremos de hacerlo coincidir con los puntos dibujados en el punto a. ¿Coincidió o no coincidió? ¿De ser afirmativa la respuesta: que criterio de congruencia se empleó? Si no coincidió encontrar el motivo.

III. EXPOSICIÓN DE NUESTRO TRABAJO

Con la conducción del profesor participar en una discusión con las conclusiones escritas en el numeral II. Tener presente que se debe respetar la palabra de los compañeros que exponen.

IV. APLICAMOS LO APRENDIDO

Nuestro profesor resolverá la situación problema planteada, para lo cual se requiere estar atentos y tomar notas en el cuaderno.

Construyo con mi equipo de trabajo una situación problema diferente a la presentada en esta guía; en ella se debemos aplicar los conceptos estudiados, escribirla en una hoja, resolverla y entregarla a nuestro profesor.

V. RELACIONEMOS LO APRENDIDO

- a. Resuelvo con la ayuda de mi equipo la siguiente situación problema:

A un jardinero se propone ampliar un sembrado de flores que tiene forma triangular, pero con una condición: cuando el sembrado se observe desde el aire se vea simétrico y en forma de moño, tal como aparece en la figura.

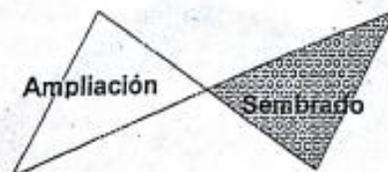


Figura 5

- b. Desarrollamos una actividad para manejar el material geométrico que nos entregará el profesor, siguiendo sus instrucciones.

"¿Que importa saber que es una línea recta si no sabe que es la rectitud?"
Séneca

Anexo 6

Unidad didáctica tomada de Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009).

Estudiante: _____ Grado: _____
Área: Matemáticas Fecha: _____
Asignatura: Geometría Tipo de guía: _____
Docente: _____ Duración: _____

CUADRILATEROS

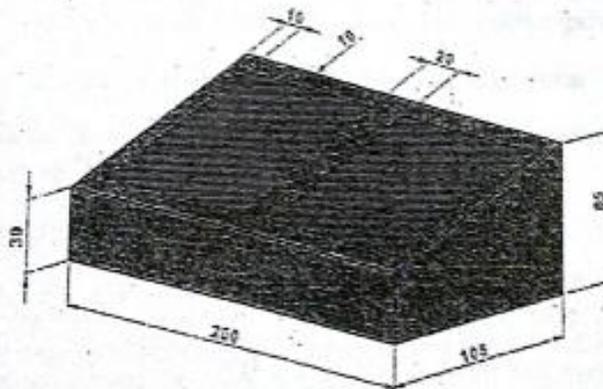
Indicadores de Logro.

1. Reconoce las diferentes características y conceptos de los cuadriláteros para su posterior aplicación.
2. Aplica propiedades y teoremas de cuadriláteros para resolver problemas y demostraciones.
3. Demuestra responsabilidad frente a la presentación de consultas y guías de ejercitación.

Geometría en el jardín

La siguiente figura representa la estructura de un colector de energía solar utilizado en invierno para sostener el crecimiento de las plantas. La parte superior del colector (1 y 2), está fabricado de vidrio para permitir que la entrada de luz solar penetre dentro y que el calor permanezca. La cubierta tiene un inclinación para que penetre la mayor cantidad de sol como sea posible.

Se requiere identificar la forma de cada cuadrilátero utilizado en la construcción del colector y calcular el área total para proceder a comprar la pintura y pintarla. Las medidas están expresadas en centímetros.



NOTA: Reúnete con dos compañeros(as) y conforma un equipo de trabajo para desarrollar todas las actividades de la presente guía.

I. INFÓRMATE

Respondo con mi equipo lo siguiente:

- ¿Qué tipo de cuadriláteros y cuál es la medida de los ángulos que están representados en la situación problema?
- ¿Cuál es el procedimiento matemático para calcular el área de cada uno de los cuadriláteros del dibujo de la situación problema?
- ¿Para qué nos sirve resolver la situación problema planteada?

II. ANIMÉMONOS A EXPLORAR

1. Respondo con mi equipo de trabajo el siguiente ejercicio de manejo del lenguaje geométrico utilizando como base las definiciones de cada termino, y como referencia, el siguiente esquema y sus afirmaciones.

- Un paralelogramo es un trapecio
- Algunos rombos son rectángulos
- Un rombo es un cuadrado
- Algunos paralelogramos son rectángulos
- El paralelogramo es un rombo
- Un trapecio no siempre es un paralelogramo



CONSTRUCCIÓN

2. Mi equipo de trabajo recibirá una bolsa con diferentes materiales (cartón paja, tijeras, colbón, regla, lápiz, borrador, vinilos y una varilla de madera), los cuales deben ser utilizados en su totalidad para realizar la construcción de una escultura geométrica que tendrá que incluir cuerpos y figuras geométricas, cuyas bases sean los cuadriláteros que aparecen en el esquema anterior (punto 1)

3. Calculamos el área total ocupada por la escultura geométrica

4. Escribimos nuestras conclusiones de los tres pasos anteriores para participar posteriormente en una socialización

III. EXPOSICIÓN DE NUESTRO TRABAJO

Nuestro equipo recibirá las esculturas construidas por los otros equipos del grupo, con las cuales debemos hacer un ejercicio de observación para identificar en ellas la cantidad de cuadriláteros de cada tipo, utilizados en cada escultura y cuál sería la fórmula matemática para calcular el área total de éstas. Posteriormente participaremos en una discusión con las conclusiones escritas en el numeral II.

IV. APLICAMOS LO APRENDIDO

Nuestro profesor resolverá la situación problema planteada, para lo cual se requiere estar atentos(as) y tomar notas en el cuaderno. Posteriormente nos explicará los siguientes seis teoremas fundamentales aplicables a los cuadriláteros:

TEOREMA 1: Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

TEOREMA 2: Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

TEOREMA 3: Los pares de ángulos adyacentes de un paralelogramo son ángulos suplementarios.

TEOREMA 4: Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

TEOREMA 5: Si un cuadrilátero tiene un par de lados opuestos paralelos y congruentes, entonces es un paralelogramo.

TEOREMA 6: Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Construyo con mi equipo de trabajo una situación diferente a la presentada en esta guía; en ella debemos aplicar los conceptos estudiados, escribirla en una hoja, resolverla y entregarla a nuestro profesor.

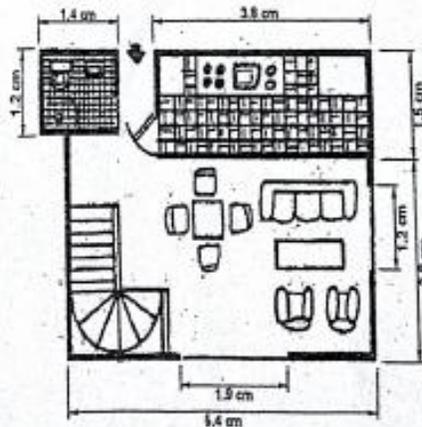
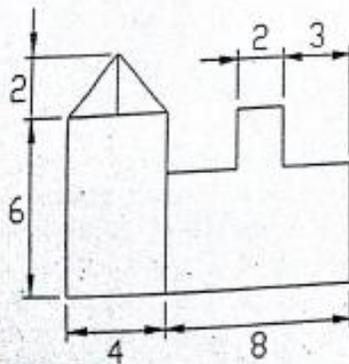
V. RELACIONEMOS LO APRENDIDO

Resuelvo con la ayuda de mi equipo de trabajo la siguiente situación problema:

a. Las figuras que aparecen a continuación representan la parte trasera y la planta interior de una casa ubicada en el municipio de Sabaneta. Con base en esta información y teniendo en cuenta que las medidas de la parte trasera de la casa están expresadas en metros, respondemos a las siguientes preguntas:

¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar la parte trasera de la casa, si se gasta medio litro de pintura por cada metro cuadrado de pared?

¿En el plano presentado de la parte interior, cuál es la suma total real de las áreas de la sala, la cocina y el baño?



b. Desarrollamos una actividad para utilizar el material geométrico que nos entregará el profesor (cubos de soma), siguiendo atentamente sus instrucciones.

"la geometría ilumina el intelecto y tiempla la mente."

Ibn Khaldun

Anexo 7

Unidad didáctica tomada de Piedrahíta, Londoño y Uribe (2009).

Estudiante: _____ Grado: _____
Área: Matemáticas Fecha: _____
Asignatura: Geometría Tipo de guía: _____
Docente: _____ Duración: _____

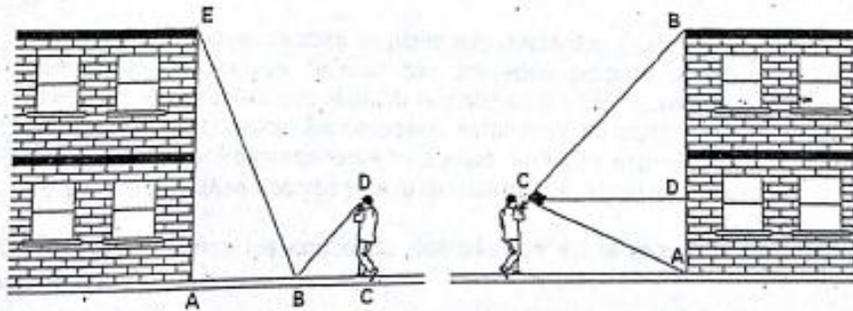
PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

Indicadores de Logro.

1. Establece relaciones entre las propiedades de las proporciones y la semejanza, mediante la solución de problemas geométricos.
2. Deduce nuevos datos de las hipótesis y los gráficos, que le permiten crear estrategias de solución a situaciones problema de proporcionalidad y semejanza.
3. Manifiesta autonomía y solidaridad, utilizando de manera efectiva el tiempo de clase.
4. Emplea, creativamente, los recursos teóricos de proporciones para simplificar procedimientos en la solución de problemas de semejanza de triángulos.
5. Usa la semejanza de triángulos para demostrar las relaciones métricas en el triángulo rectángulo.

ALTURA DE LOS EDIFICIOS

Para obtener la altura de un edificio sin la necesidad de medirlo de forma directa, se le entrega a un estudiante un flexómetro, un espejo y un libro. Con estos materiales, y utilizando dos procedimientos distintos, tendrá que hallar la altura del edificio y comprobar que con ambos procedimientos el resultado será el mismo. El estudiante se debe apoyar en los dos siguientes esquemas para dar solución al problema planteado:



NOTA: Reúnete con dos compañeros(as) y conforma un equipo para desarrollar todas las actividades de la presente guía.

I. INFORMATE

Respondo con mi equipo lo siguiente:

- A. ¿Cuáles triángulos de los que se encuentran en las figuras de la situación problema anterior, se pueden considerar similares en su forma, y cuáles triángulos, al ser comparados con otros, tienen una distribución igual en sus segmentos?
- B. ¿Cuál teorema le servirá al estudiante para calcular las longitudes de cada uno de los segmentos de las figuras de la situación problema?
- C. ¿Para qué nos servirá resolver la situación problema planteada?

II. ANIMÉMONOS A EXPLORAR

Mi equipo de trabajo recibirá un geoplano rectangular con el cual debemos desarrollar lo siguiente:

- A. Construir con los chinchones y los cauchos, tres figuras geométricas distintas, de tamaño mediano, y medir los lados de cada una de las figuras.
- B. Ampliar la misma cantidad de veces cada una de las figuras construidas (originales) sosteniendo la forma y midiendo los segmentos que la componen.
- C. Reducir la misma cantidad de veces cada una de las figuras geométricas originales, sosteniendo la forma y midiendo los segmentos que la conforman.
- D. Dividir los datos de los lados de cada figura ampliada entre los datos correspondientes de su figura original.
- E. Dividir los datos de los lados de cada figura original entre los datos correspondientes de cada figura reducida.
- F. Comparamos los resultados de los procedimientos anteriores (D y E), en cada figura, y escribimos nuestras propias conclusiones de las situaciones.

CONSTRUCCIÓN

Mi equipo de trabajo recibirá un plano arquitectónico y una bolsa con diferentes materiales, los cuales deberán ser utilizados para la construcción de una maqueta, ésta tendrá que respetar la distribución del espacio establecido sobre el plano arquitectónico. Es necesario estar muy atentos(as) en la rigurosidad de las medidas. Posteriormente mi equipo hará una exposición de la maqueta, de las conclusiones escritas y de la respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo relacionamos los conceptos geométricos en la maqueta construida por nuestro equipo?

III. EXPOSICIÓN DE NUESTRO TRABAJO

Nuestro equipo recibirá las maquetas construidas por los otros equipos de mi grupo, con los cuales debemos hacer un ejercicio de observación para identificar

en ellas si la lectura del plano arquitectónico y las medidas de la maqueta tienen una distribución adecuada. Con base en el análisis de cada una de las maquetas, sacaremos conclusiones adicionales a las del numeral II, para participar luego con ellas en una discusión.

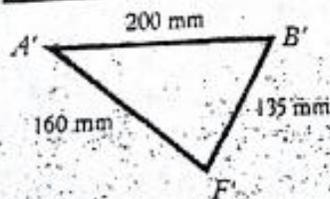
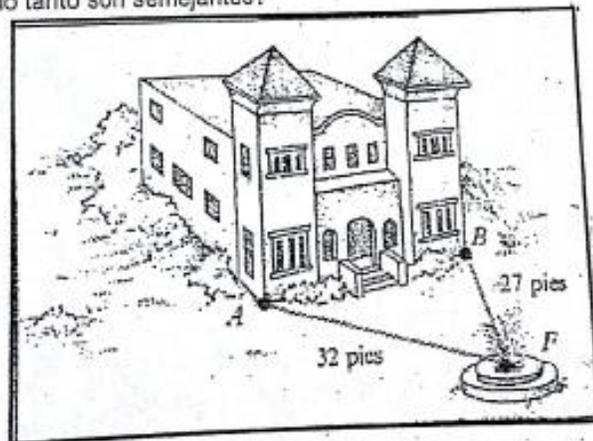
IV. APLICAMOS LO APRENDIDO

Nuestro profesor resolverá la situación problema planteada para lo cual se requiere estar atentos(as) y tomar notas en el cuaderno. Posteriormente nos explicará los conceptos de: escala, segmentos proporcionales, polígonos semejantes y postulados de semejanza.

Construyo con mi equipo de trabajo una situación problema diferente a la presentada en esta guía; en ella debemos aplicar los conceptos estudiados, escribirla en una hoja, resolverla y entregarla al profesor.

V. RELACIONEMOS LO APRENDIDO

- A. Resuelvo con la ayuda de mi equipo la siguiente situación problema: se instalará una fuente a 32 pies de una de las esquinas de un edificio y a 27 pies de la otra esquina; el edificio tiene 40 pies de ancho. En el conjunto de planos para este proyecto se emplea una escala de 5 milímetros por cada pie. Luego de ubicar las esquinas A' y B' del edificio del plano, se localiza un punto F' a 160 mm de A' (5×32) y a 135 milímetros de B' (5×27). ¿El triángulo real ABF es fiel (distribución proporcional) a la figura del plano $A'B'F'$, y por lo tanto son semejantes?



Anexo 8

FORMATO DE ENTREVISTA SOBRE LA POBLACIÓN Y MUESTRA

Entrevistada: Beatriz Pino

Entrevista: Natalia Múnera

1. El grado de los estudiantes es :
2. ¿La institución es de carácter oficial o privada? ¿Cuál es el calendario académico que maneja?
3. El barrio, el municipio y dirección donde está ubicada la institución son:
4. La institución fue fundada en Fue fundado en el año:
5. Espacios del colegio:
6. Estrato socio-económico de los estudiantes:
7. Los estudiantes en su mayoría viven en:
8. Las padres de familia se emplean en:
9. Las problemáticas que más viven los estudiantes son:
10. Las actividades en las cuales se involucran los estudiantes antes y después del colegio son:
11. El desempeño académico de los estudiantes es:
12. Cómo se una clase de matemáticas y de geometría a los estudiantes en el aula:
13. El modelo pedagógico de la institución es:

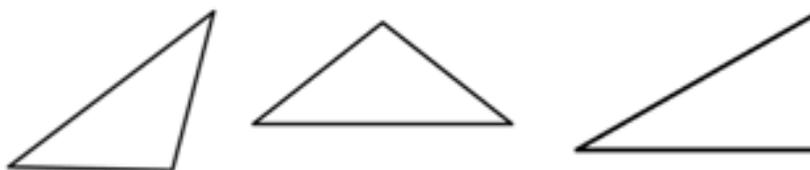
Anexo 9

ENTREVISTA PARA LOS ESTUDIANTES

Entrevistado:

PREGUNTAS:

1. ¿Para qué crees sirven los instrumentos de medida?
2. Señala cuáles de los siguientes triángulos son iguales:

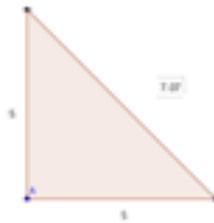


3. Menciona para qué se usa cada uno de los siguientes instrumentos:



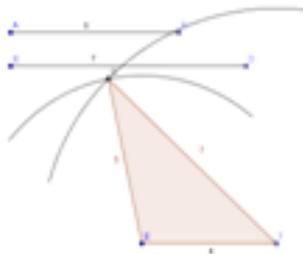
4. ¿Cuál de los instrumentos de medida que usamos en las clases te parece más complicado de usar? ¿Por qué?
5. En la instrucción "un triángulo que tenga un ángulo de 90° y que los lados que forman el ángulo, midan 5cm", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

6. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?



7. En la instrucción "un triángulo en el que los lados midan 5cm, 7cm y 4cm, respectivamente", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

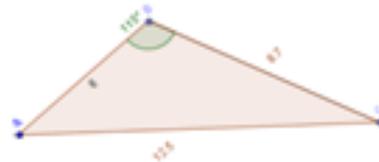
8. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?



9. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus lados, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?



10. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus ángulos, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?



Anexo 10

ENTREVISTA PARA LOS ESTUDIANTES

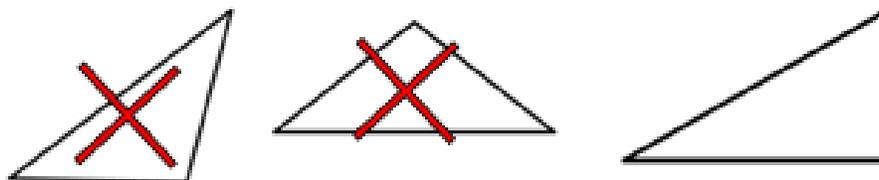
Entrevistado: estudiante Tierra

PREGUNTAS:

1. ¿Para qué crees sirven los instrumentos de medida?

"Para medir y para hacer dibujo exactos"

2. Señala cuáles de los siguientes triángulos son iguales:



3. Menciona para qué se usa cada uno de los siguientes instrumentos:



"Para hacer círculos y arcos para hacer triángulos"



"Para medir ángulos"



"Para medir lados en cm y mm"

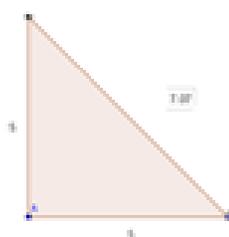
4. ¿Cuál de los instrumentos de medida que usamos en las clases te parece más complicado de usar? ¿Por qué?

"El compás porque se me daña la hoja"

5. En la Instrucción "un triángulo que tenga un ángulo de 90° y que los lados que forman el ángulo, midan 5cm", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

"La regla porque me hablan de centímetros y el transportador porque me hablan de 90° "

6. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?

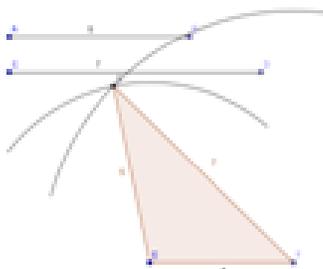


"Si, porque tiene los dos lados de 5 y el ángulo recto"

7. En la instrucción "un triángulo en el que los lados midan 5cm, 7cm y 4cm, respectivamente", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

"La regla y... el compás. El compás se tiene que usar porque se deben hacer los arcos"

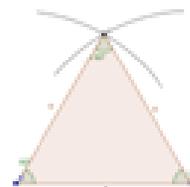
8. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?



"Si, porque tiene las medidas que nos pedían"

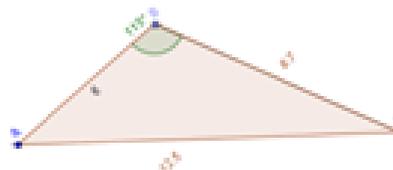
9. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus lados, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?

"La regla, y como tiene los lados iguales se llama equilátero"



10. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus ángulos, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?

"El transportador, y como tiene un ángulo obtuso, obtusángulo"



Anexo 11

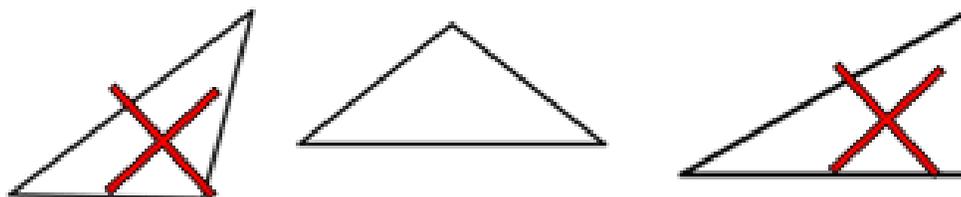
ENTREVISTA PARA LOS ESTUDIANTES

Entrevistado: estudiante Fuego

1. ¿Para qué crees sirven los instrumentos de medida?

"Para hacer dibujos"

2. Señala cuáles de los siguientes triángulos son iguales:



3. Menciona para qué se usa cada uno de los siguientes instrumentos:



"Para hacer círculos"



"Para hacer ángulos con los grados"



"Para medir los cm y los mm"

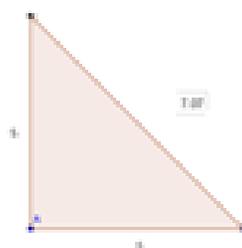
4. ¿Cuál de los instrumentos de medida que usamos en las clases te parece más complicado de usar? ¿Por qué?

"El transportador, porque los números me confunden a veces y no sé dónde ponerlo"

5. En la instrucción "un triángulo que tenga un ángulo de 90° y que los lados que forman el ángulo, midan 5cm", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

"Con el que se miden los ángulos y la regla, por los cm que dice ahí y porque dice ángulo"

6. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?

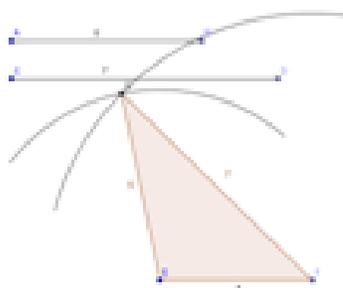


"Si, porque ahí están las medidas que declaran"

7. En la instrucción "un triángulo en el que los lados midan 5cm, 7cm y 4cm, respectivamente", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

"La regla y el compás, porque debemos hacer que los arcos del compás se unan para hacer el triángulo"

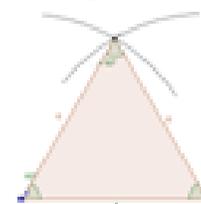
8. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?



"Si, porque ahí están las medidas que nos pedían"

9. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus lados, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?

"mmm, pues creo que sería la regla y pues llama equilátero porque tiene todo igual"



10. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus ángulos, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?

"Como en los lados es la regla, aquí es el transportador, y creo que se llama obtuso"



Anexo 12

ENTREVISTA PARA LOS ESTUDIANTES

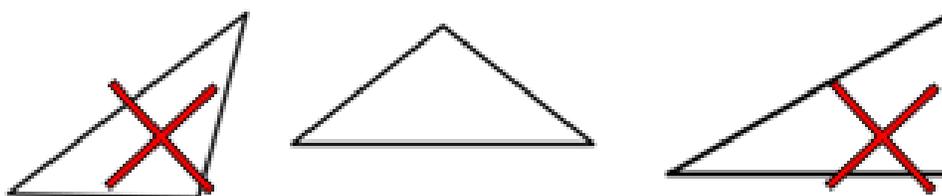
Entrevistado: estudiante Aire

PREGUNTAS:

1. ¿Para qué crees sirven los Instrumentos de medida?

"Son para medir"

2. Señala cuáles de los siguientes triángulos son iguales:



3. Menciona para qué se usa cada uno de los siguientes Instrumentos:



"Para hacer círculo"



"Para los grados"



"Para medir las rayas"

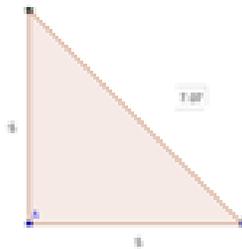
4. ¿Cuál de los Instrumentos de medida que usamos en las clases te parece más complicado de usar? ¿Por qué?

"El transportador porque no sé dónde poner el centro y el compás porque a veces no se me unen los arcos"

5. En la instrucción "un triángulo que tenga un ángulo de 90° y que los lados que forman el ángulo, midan 5cm", ¿qué Instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

"Cojo el Instrumento de los ángulos, hago el ángulo y termino de hacer el triángulo"

6. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?

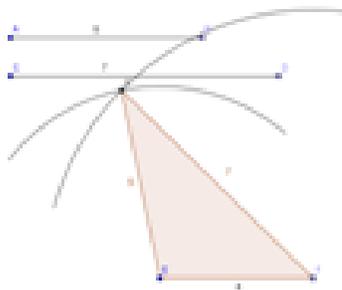


"No, porque todos los lados deben medir 5 y aquí hay un lado de 7 y unos milímetros"

7. En la instrucción "un triángulo en el que los lados midan 5cm, 7cm y 4cm, respectivamente", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

"Con la regla porque me dan cm"

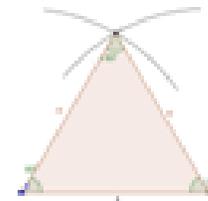
8. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?



"No porque el lado más grande debe estar abajo"

9. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus lados, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?

"La regla y como tiene todos los ángulos iguales se llama acutángulo"



10. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus ángulos, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?

"Pues ese sería no con la regla, creo que con el transportador, pero no me acuerdo como se llama"



Anexo 13

ENTREVISTA PARA LOS ESTUDIANTES

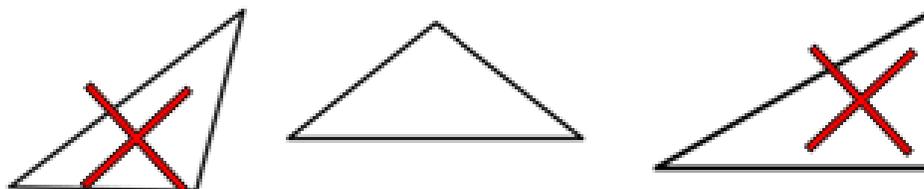
Entrevistado: estudiante Agua

PREGUNTAS:

1. ¿Para qué crees sirven los instrumentos de medida?

"Para medir y hacer dibujos"

2. Señala cuáles de los siguientes triángulos son iguales:



3. Menciona para qué se usa cada uno de los siguientes instrumentos:



"Para hacer circunferencias"



"Para hacer ángulos"



"Para medir los cm y mm"

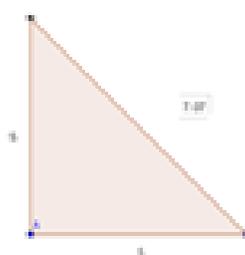
4. ¿Cuál de los instrumentos de medida que usamos en las clases te parece más complicado de usar? ¿Por qué?

"Pues el compás porque a veces no se unen para hacer el triángulo y me rompe la hoja"

5. En la instrucción "un triángulo que tenga un ángulo de 90° y que los lados que forman el ángulo midan 5cm", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

"El transportador y la regla, para hacer los centímetros y los grados"

6. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?

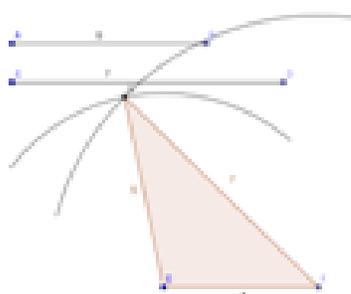


"Creo que sí, porque las medidas están buenas"

7. En la instrucción "un triángulo en el que los lados midan 5cm, 7cm y 4cm, respectivamente", ¿qué instrumentos utilizarías? ¿Por qué?

"la regla y el compás, para que se unan los arcos y uno pueda terminar de hacer el triángulo"

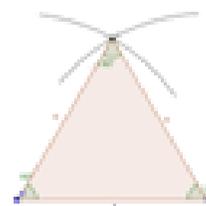
8. ¿El siguiente triángulo corresponde a la instrucción de la pregunta anterior? ¿Por qué?



"Sí, las medidas están buenas"

9. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus lados, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?

"La regla y como los lados tienen la misma medida es un equilátero"



10. Nos piden que escribamos el nombre del siguiente triángulo según sus ángulos, ¿Qué instrumento usarías? ¿Cómo se llama el triángulo?

"Transportador y como los ángulos son agudos se llama acutángulo"

